ТЕОРИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ (ОГЭ)

ЧИСЛА И ВЫРАЖЕНИЯ

1. Выражения, преобразование выражений

Числовые выражения составляются из чисел с использованием знаков действий («+», «-», «•», «:») и скобок. Например, 32:4; 21•3+5; 3•(2:0,2–4) – числовые выражения.

Значением числового выражения называется число, получающееся в результате выполнения всех действий в этом числовом выражении. Например, значения числовых выражений, приведённых выше, равны соответственно 8; 68 и 18.

Выражение, в котором встречается деление на нуль, не имеет числового значения, так как **на нуль делить нельзя**. Говорят, что такие выражения не имеют смысла.

Выражение, содержащее некоторые переменные величины, называется **выражением с переменными** (например, 10t; 20a+10b; 3c:d и т.д.).

Значение выражения с переменными при данных значениях переменных – это значение числового выражения, которое получится, если в выражение с переменными вместо каждой переменной подставить данное её значение.

Например, значение выражения 20t+10b при t=0,1, b=0,2 равно 20•0,1+10•0,2=2+2=4; значение выражения 3c:d при c=1; d=3 равно (3•1):3=1.

Для преобразования выражений применяются основные свойства сложения и умножения чисел:

1) для любых чисел a и b верны равенства a+b=b+a, ab=ba (**переместительное свойство**);

2) для любых чисел a, b и c верны равенства (a+b)+c=a+(b+c), (ab)c–a(bc) (**сочетательное свойство**);

3) для любых чисел a, b и c верно равенство a(b+c)=ab+ac (**распределительное свойство**).

Два выражения называются **тождественно равными**, если их значения равны при любых допустимых значениях переменных.

Тождество – это равенство, верное при любых допустимых значениях переменных.

Тождественное преобразование выражения – это замена выражения другим, тождественно равным ему, выражением.

Пример 1. Найдите значение выражения (3:(0,2–0,1)+4)•5.
Решение.
1) 0,2–0,1=0,1;
2) 3:0,1=30;
3) 30+4=34;
4) 34–5=170.
Ответ: 170.

Пример 2. Найдите значение выражения (2mx+3n)•y при x=1; y=2; m=0,5; n=0,3.
Решение.
Подставим значения переменных в выражение:
(2mx+3n)•y=(2•0,5•1+3•0,3)•2=(1+0,9)•2=1,9•2=3,8.
Ответ: 3,8.

Пример 3. Вычислите значение выражения 11,2•3,1–11,2•1,1+22,4•(-0,5).
Решение.
11,2•3,1–11,2•1,1+22,4•(-0,5)=11,2•(3,1–1,1)–11,2 =11,2–2–11,2 =11,2•(2–1)=11,2.
Ответ: 11,2.

Пример 4. Упростите выражение (3x–2y–2)–(x–y)–4+2x+y+1.
Решение.
(3x–2y–2)–(x–y)–4+2x+y+1= 3x–2y–2–x+y–4+2x+y+1=(3x–x+2x)–(2y–y–y)–(2+4–1)=4x–5.
Ответ: 4x–5.

2. Степень с натуральным показателем, её свойства

Степенью некоторого числа **a** с натуральным показателем **n (n>1)** называется выражение

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{раз}}$$

$a^1=a$. При $a\neq0$ считают $a^0=1$.

Например,

$5^3=5\bullet5\bullet5=125$; $(-2)^4=(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)=16$ и т.д.

Свойства степени с натуральным показателем:

1) для любого положительного числа **a**: $a^n>0$; $0^n=0$.

2) для отрицательного числа **a**: $a^n>0$, если **n** – чётное число и $a^n<0$, если **n** – нечётное число;

3) $a^2\geq0$ для любого числа **a**;

4) для любого числа **a** и любых натуральных чисел **m** и **n**: $a^m a^n=a^{m+n}$;

5) для любого числа $a\neq0$ и любых натуральных чисел **m** и **n** таких, что $m>n$: $a^m:a^n=a^{m-n}$;

6) для любых чисел **a** и **b** и любого натурального числа **n**: $(ab)^n=a^n b^n$;

7) для любого числа **a** и любых натуральных чисел **m** и **n**: $(a^m)^n=a^{mn}$.

Пример 1. Найдите значение выражения: $(-2)^3\bullet3^2+16^2$.

Решение.

Вначале выполним возведения в степень:

$(-2)^3=(-2)\bullet(-2)\bullet(-2)=-8$;

$3^2=3\bullet3=9$;

$16^2=16\bullet16=256$.

Теперь найдём значение выражения:

$(-2)^3\bullet3^2+16^2=(-8)\bullet9+256=256-12=184$.

Ответ: **184**.

Пример 2. Упростите выражение $2x^2\bullet x^3-x^7:x^2$.

Решение.

Пользуясь свойствами **4)** и **5)**, имеем:

$2x^2\bullet x^3-x^7:x^2=2x^{2+3}-x^{7-2}=2x^5-x^5=x^5$.

Ответ: x^5.

Пример 3. Упростите выражение $((x^2y)^3)^4$.

Решение.

Пользуясь свойствами **6)** и **7)**, имеем: $((x^2y)^3)^4=(x^2y)^{3\bullet4}=(x^2y)^{12}=(x^2)^{12}\bullet y^{12}=x^{2\bullet12}\bullet y^{12}=x^{24}y^{12}$.

Ответ: $x^{24}y^{12}$.

3. Одночлены, многочлены

Одночленом называется выражение, являющееся произведением чисел, переменных и их степеней.

Например, выражения $2a^2b$; $2x^2\bullet(-4)^3yz^2$; $-5x^4$ – одночлены.

Стандартный вид одночлена – это произведение числового множителя, который стоит на первом месте, и степеней различных переменных.

Например, стандартным видом одночлена $(-2)^3x^4y\bullet(-3)$ является $24x^2y$.

Коэффициент одночлена – это числовой множитель этого одночлена, записанного в стандартном виде.

Степень одночлена – это сумма показателей степеней всех его переменных. Если одночлен является числом (не содержит переменных), то его степень считают равной нулю.

Многочлен – это выражение, являющееся суммой одночленов (если многочлен состоит из двух членов, его называют двучленом; если из трёх – трёхчленом).

Стандартный вид многочлена – это сумма одночленов стандартного вида без подобных слагаемых. Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен стандартного вида, называется степенью этого многочлена.

Степенью произвольного многочлена называется степень многочлена стандартного вида, тождественно равного исходному многочлену.

Для того чтобы **умножить одночлен** на **многочлен**, нужно умножить этот одночлен на каждый член многочлена и сложить полученные произведения.

Для того чтобы **умножить многочлен** на **многочлен**, нужно каждый член первого многочлена умножить на каждый член второго многочлена и сложить полученные произведения.

Разложить многочлен на множители означает представить этот многочлен в виде произведения двух или нескольких многочленов.

Формулы сокращённого умножения:

1) $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$;

2) $(a\pm b)^3= a^3\pm 3ab+3ab^2\pm b^3$;

3) $a^2-b^2 =(a-b)(a+b)$;

4) $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

Пример 1. Приведите одночлен $2a^2\bullet(-3)^2b^3\bullet a(-2)b$ к стандартному виду, укажите его коэффициент и степень.

Решение.

$2a^2\bullet(-3)^2b^3\bullet a(-2)b=2\bullet 9\bullet(-2)a^2\bullet a\bullet b^3\bullet b=-36a^3b^4$.

Коэффициент данного одночлена равен **(-36)**, а его степень равна **7**.

Ответ: $-36a^3b^4$; - 36; 7.

Пример 2. Упростите выражение $2x(x-3)^2-(x-1)(2x^2+2)$.

Решение.

$2x(x-3)^2-(x-1)(2x^2+2)=2x(x^2-6x+9)-(2x^3+2x-2x^2-2)=2x^3-12x^2+18x-2x^3+2x^2-2x+2=16x+2-10x^2$.

Ответ: $16x+2-10x^2$.

Пример 3. Разложите на множители многочлен $x^3-8y^3+2x^2y+4xy^2+8y-5x$.

Решение.

$x^3-8y^3+2x^2y+4xy^2+8y-5x=(x-2y)(x^2+2xy+4)+2y(x^2+2xy+4)-5x=(x-2y+2y)(x^2+2xy+4)-5x=x(x^2+2xy+4-5)=x(x^2+2xy-1)$.

Ответ: $x(x^2+2xy-1)$.

4. Рациональные дроби и их свойства

Целые выражения – это выражения, составленные из чисел и переменных с использованием действий сложения, вычитания, умножения и деления на число, отличное от нуля.

Дробные выражения допускают также деление на выражение с переменными.

Целые и дробные выражения называют **рациональными выражениями**.

Допустимые значения переменных – это те значения переменных, при которых выражение имеет смысл.

Рациональная дробь – это дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены.

Основное свойство дроби: если числитель и знаменатель некоторой рациональной дроби умножить на один и тот же многочлен, не равный тождественно нулю, то получится дробь, равная исходной.

Тождество – это равенство, которое верно при всех допустимых значениях переменных, входящих в это равенство.

Свойства действий с рациональными дробями:

Если a, b, c – многочлены, причём многочлен c не равен нулю тождественно, то верно:

$$1)\ \frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}$$

$$2)\ \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}$$

Если **a**, **b**, **c**, **d** – многочлены, причём многочлены **b** и **d** тождественно не равны нулю, то верно:

$$3)\ \frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$4)\ \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$$

Если **a**, **b**, **c**, **d** – многочлены, причём многочлены **b**, **c** и **d** тождественно не равны нулю, то верно:

$$5)\ \frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

Пример 1.
Сократите дробь

$$\frac{x^2+2xy+y^2-1}{x-y+1}$$

Решение.

$$\frac{x^2+2xy+y^2-1}{x-y+1}=\frac{(x-y)^2-1}{x-y+1}=\frac{(x-y-1)(x-y+1)}{x-y+1}=x-y-1.$$

Ответ: **x–y–1**.

Пример 2.
Упростите выражение

$$\frac{2x^2-5}{(x-5)^3}-\frac{45}{(x-5)^3}$$

Решение.

$$\frac{2x^2-5}{(x-5)^3}-\frac{45}{(x-5)^3}=\frac{2(x^2-25)}{(x-5)^3}=\frac{2(x-5)(x+5)}{(x-5)(x^2-10x+25)}=\frac{2x+10}{x^2-10x+25}$$

Ответ: $\frac{2x+10}{x^2-10x+25}$.

Пример 3.
Выполните действия

$$\frac{x^2-3x}{2y^2}:\frac{x-3}{4y}$$

Решение.

$$\frac{x^2-3x}{2y^2}:\frac{x-3}{4y}=\frac{x(x-3)\bullet 4y}{2y^2(x-3)}=\frac{2x}{y}.$$

Ответ: $\frac{2x}{y}$.

5. Квадратные корни

Натуральные числа – это числа **1**, **2**, **3**, **4**, **...**, которые употребляются при счёте. Множество натуральных чисел обозначается **N**.

Целые числа – это натуральные числа, противоположные им числа и число нуль (**..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...**). Множество целых чисел обозначается **Z** .

Рациональные числа – это целые и дробные числа. Множество рациональных чисел обозначается **Q**.

Всякое рациональное число может быть представлено в виде дроби $\frac{m}{n}$, где **m∈N**, **n∈N** (∈ – знак принадлежности некоторому множеству).

Всякое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной десятичной периодической дроби, и обратно: всякая бесконечная десятичная периодическая дробь есть некоторое рациональное число.

Однако рациональные числа – не все числа. Например, число, квадрат которого равен **2** (длина диагонали квадрата со стороной **1**), не является рациональным.

Бесконечные десятичные непериодические дроби называют **иррациональными числами**.

Действительные числа – это рациональные и иррациональные числа. Множество действительных чисел обозначают **R**.

Квадратный корень из числа a – это число, квадрат которого равен **a**. Например, **4** и **-4** – квадратные корни из **16**, так как $4^2=(-4)^2=16$.

Арифметический квадратный корень из числа a – это неотрицательное число, квадрат которого равен **a**.

Арифметический квадратный корень из числа a обозначают $\sqrt{a}$.

Например, $\sqrt{25}=5$, так как **5≥0** и $5^2=25$; $\sqrt{0}=0$ 0, так как **0≥0** и $0^2=0$.

То есть, $\sqrt{a}=b$, если **b≥0** и $b^2=a$.

Так как квадрат любого числа – неотрицательное число, то при a<0 выражение 4a не имеет смысла.

В зависимости от **a** уравнение $x^2=a$:

1) не имеет корней при **a<0**;

2) имеет единственный корень, равный нулю, при **a=0**;

3) имеет два корня $x_1=\sqrt{a}$ и $x_2=-\sqrt{a}$ при **a >0**.

Свойства арифметического квадратного корня:

1) Если **a≥0** и **b≥0**, то $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\bullet\sqrt{b}$;

2) Если **a≥0** и **b>0**, то $\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$;

3) При любых значениях **a** верно равенство $\sqrt{a^2}=|a|$.

Пример 1.

Найдите значение выражения

$$\left(\sqrt{36}\bullet\sqrt{0,01}-\sqrt{0,04}\bullet\sqrt{25}\right)^2$$

Решение.

$$\left(\sqrt{36}\bullet\sqrt{0,01}-\sqrt{0,04}\bullet\sqrt{25}\right)^2=(6\bullet 0,1-0,2\bullet 5)^2=(-0,4)^2=0,16.$$

Ответ: **0,16**.

Пример 2.

Решите уравнение

$$x^2=3^2+\sqrt{256}$$

Решение.

$$x^2=9+16=25$$
$$\mathrm{x}=\pm\sqrt{25}=\pm 5$$

Ответ: **±5**.

Пример 3.

Найдите значение выражения

$$\sqrt{32\bullet 18\bullet 81}$$

Решение.

$$\sqrt{32 \bullet 18 \bullet 81} = \sqrt{16 \bullet 2 \ \bullet 18 \bullet 81} = \sqrt{16} \bullet \sqrt{36} \bullet \sqrt{81} = 4 \bullet 6 \bullet 9 = 216$$

Ответ: **216**.

Пример 4.
Найдите значение выражения

$$\sqrt{\frac{8 \bullet 36}{18}}$$

Решение.

$$\sqrt{\frac{8 \bullet 36}{18}} = \sqrt{\frac{2 \bullet 4 \bullet 36}{2 \bullet 9}} = \sqrt{\frac{4 \bullet 36}{9}} = \frac{\sqrt{4} \bullet \sqrt{36}}{3} = \frac{2 \bullet 6}{3} = 4$$

Ответ: **4**.

Пример 5.
Упростите выражение

$$\left(\frac{\sqrt{75} - x}{x^2 - 75} + x + 5\sqrt{3}\right) : (x^2 + 10\sqrt{3}x + 74)$$

Решение.

$$1)\ \frac{\sqrt{75} - x}{x^2 - 75} + x + 5\sqrt{3} = -\frac{x - \sqrt{75}}{(x - \sqrt{75})(x + \sqrt{75})} + x + 5\sqrt{3} = x + 5\sqrt{3} - \frac{1}{x + 5\sqrt{3}}$$

$$= \frac{(x + 5\sqrt{3})^2 - 1}{x + 5\sqrt{3}} = \frac{x^2 + 10\sqrt{3}x + 74}{x + 5\sqrt{3}}$$

$$2)\ \frac{x^2 + 10\sqrt{3}x + 74}{x + 5\sqrt{3}} : (x^2 + 10\sqrt{3}x + 74) = \frac{1}{x + 5\sqrt{3}}$$

Ответ: $\frac{1}{x+5\sqrt{3}}$.

6. Степень с целым показателем и её свойства

Если **a≠0** и **n** – целое отрицательное число, то $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$.

Выражение **0n** при **n∈Z**, **n≤0** не имеет смысла.

Примеры:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9};$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\frac{1}{9}} = 9.$$

Свойства степени с целым показателем:

Для всех **a≠0** и любых **m,n∈Z** верны равенства:

1) $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$;

2) $a^m : a^n = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$.

Для всех **a≠0**, **b≠0** и любого **n∈Z** верны равенства

4) $(ab)^n = a^n b^n$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Стандартный вид числа b – это его запись в виде $a\cdot10^n$, где $1\le a<10$, $n\in Z$. Число **n** называется порядком числа **b**.

Пример 1.
Вычислите $(5\cdot10^{-2}+6^{-1}\cdot36-20^{-1})^2$.
Решение.

$$\left(5\cdot10^{-2}+6^{-1}\cdot36-20^{-1}\right)^2=\left(5\cdot\frac{1}{10^2}+\frac{1}{6}\cdot36-\frac{1}{20}\right)^2=\left(\frac{1}{20}+6-\frac{1}{20}\right)^2=6^2=36.$$

Ответ: **36**.

Пример 2.
Упростите выражение

$$\left(a^{-2}-b^{-2}\right):\frac{(a-b)}{ab}$$

Решение.

$$\left(a^{-2}-b^{-2}\right):\frac{(a-b)}{ab}=\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)\cdot\frac{ab}{a-b}=\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\cdot\frac{ab}{a-b}=-\frac{(a-b)(a+b)}{(ab)^2}\cdot\frac{ab}{a-b}=-\frac{a+b}{ab}.$$

Ответ. $-\frac{a+b}{ab}$.

Пример 3.
Представьте число **36782** в стандартном виде и назовите его порядок.
Решение.
$36782=3678,2\cdot10=367,82\cdot10^2=36,782\cdot10^3=3,6782\cdot10^4$. Порядок числа равен **4**.
Ответ: **3,6782•104**; порядок **4**.

7. Корень n-й степени, степень с рациональным показателем и их свойства

Число, **n**-я степень которого равна **a**, называется **корнем n-й степени из числа a** ($n\in N$) и обозначается $\sqrt[n]{a}$.

Неотрицательное число, **n**-я степень которого равна отрицательному числу а, называется арифметическим **корнем n-й степени из числа a**.

Свойства арифметического корня n-й степени:

1) Если $a\ge0$, $b\ge0$, то $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$;
2) Если $a\ge0$, $b>0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$;
3) Если $n,k\in N$, $a\ge0$, то $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$;
4) Если $n,k\in N$, $a\ge0$, то $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Если $a>0$, $m\in Z$, $n\in N$, то $a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Если $m,n\in N$, то $0^{\frac{m}{n}}=0$.

Свойства степени с рациональным показателем:

Для любого $a>0$ и $p,q\in Q$:
1) $a^pa^q=a^{p+q}$;
2) $a^p:a^q=a^{p-q}$;
3) $(a^p)^q=a^{pq}$.

Для любых $a>0$, $b>0$ и $p\in Q$:
4) $(ab)^p=a^p\cdot b^p$;

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$.

Пример 1.
Найдите значение выражения

$$\sqrt[3]{8 \bullet 0,001} \bullet \sqrt[5]{\frac{243}{32}}$$

Решение.

$$\sqrt[3]{8 \bullet 0,001} \bullet \sqrt[5]{\frac{243}{32}} = \sqrt[3]{8} \bullet \sqrt[3]{0,001} \bullet \frac{\sqrt[5]{243}}{\sqrt[5]{32}} = 2 \bullet 0,1 \bullet \frac{3}{2} = 0,3.$$

Ответ: **0,3**.

Пример 2.
Упростите выражение

$$\left(\left(a^{-0,4}b^{0,2}\right)^5 \bullet a^2 b\right)^{\frac{1}{3}}$$

Решение.

$$\left(\left(a^{-0,4}b^{0,2}\right)^5 \bullet a^2 b\right)^{\frac{1}{3}} = ((a^{-0,4})^5 \bullet \left(b^{0,2}\right)^5 \bullet \mathrm{a}^2 b)^{\frac{1}{3}} = (a^{-2} \bullet \mathrm{b} \bullet \mathrm{a}^2 b)^{\frac{1}{3}} = \left(b^2\right)^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{2}{3}}$$

Ответ: $b^{\frac{2}{3}}$.

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

1. Уравнения с одной переменной

Уравнение с одной переменной – это равенство, содержащее переменную.

Корень уравнения – это значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Решить уравнение означает найти все его корни или доказать, что корней нет.

Равносильные уравнения – уравнения с одними и теми же корнями.

Следующие преобразования приводят уравнение к **равносильному** ему уравнению:

• перенос слагаемого из одной части в другую с изменением знака этого слагаемого;

• умножение или деление обеих частей уравнения на одно и то же не равное нулю число.

Линейное уравнение с одной переменной – это уравнение вида **ax=b**, где **x** – переменная, **a** и **b** – некоторые числа.

1) Если **a=b=0**, то это уравнение имеет **бесконечно много решений**;

2) Если **a≠0**, то это уравнение имеет **один корень**: $x=\frac{b}{a}$;

3) Если **a=0** и **b≠0**, то это уравнение **не имеет корней**.

Пример 1.

Решите уравнение

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{(x+1)}{2}=2$$

Решение.

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{(x+1)}{2}=2;$$

$$\frac{4x-2-3x-3}{6}=2;$$

$$\frac{x-5}{6}=2;$$

$$x-5=12;$$

$$x=17.$$

Ответ: **17**.

Пример 2.

Решите уравнение

$$5x+\frac{2x+3}{4}=\frac{3x-1}{2}+4x;$$

Решение.

$$5x+\frac{2x+3}{4}=\frac{3x-1}{2}+4x;$$

$$\frac{22x+3}{4}=\frac{11x-1}{2};$$

$$44x+6=44x-4;$$

$$6=-4,$$

то есть данное уравнение не имеет корней.

Ответ: нет корней.

2. Системы линейных уравнений

Линейное уравнение с двумя переменными – это уравнение вида **ax+by=c**, где **x** и **y** – переменные, **a**, **b** и **c** – некоторые числа. **Решение уравнения с двумя переменными** (не обязательно линейного) – это пара значений переменных, при подстановке которых в уравнение оно обращается в верное равенство.

Общий вид системы линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} ax + by = c, \\ dx + ey = f. \end{cases}$$

Решение системы уравнений с двумя переменными (не обязательно линейных) – это пара значений переменных, при подстановке которых в уравнение системы каждое из них обращается в верное равенство.

Алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя переменными **методом подстановки**:

1) выразить из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую;
2) подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;
4) найти соответствующее значение второй переменной и выписать решение системы.

Алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя переменными **методом сложения**:

1) умножить почленно уравнения системы, подобрав множители таким образом, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположны;
2) сложить почленно левые и правые части уравнений системы;
3) решить полученное уравнение с одной переменной;
4) найти соответствующее значение второй переменной и выписать решение системы.

Пример 1.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1; \\ 2x - 3y = 2. \end{cases}$$

Решение.

Из второго уравнения системы:

$$x = \frac{2 + 3y}{2}$$

Подставим получившееся выражение в первое уравнение вместо **x**:

$$\frac{2 + 3y}{2} - \frac{y}{3} = 1;$$

$$\frac{6 + 9y - 4y}{12} = 1;$$

$$5y + 6 = 12;$$

$$5y = 6;$$

$$y = \frac{6}{5}.$$

Найдём **x**:

$$x = \frac{2 + 3 \cdot \frac{6}{5}}{2} = \frac{14}{5}.$$

Ответ: (**2,8**; **1,2**).

Пример 2.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2; \\ 2x + 3y = 5. \end{cases}$$

Решение.

Умножив первое уравнение на **(-4)**, получим систему

$$\begin{cases}-2x+y=-8;\\ 2x+3y=5.\end{cases}$$

Отсюда:

$$4y=-3;$$

$$y=-\frac{3}{4};$$

$$x=\frac{(5-3y)}{2}=\frac{5-3\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)}{2}=\frac{29}{8}.$$

Ответ: $\left(\frac{29}{8};-\frac{3}{4}\right)$.

3. Квадратные уравнения

Уравнение вида **ax+bx+c=0**, где **x** – переменная, **a**, **b**, **c** – некоторые числа, причём **a≠0** , называется **квадратным уравнением**.

Квадратное уравнение при **a=1** (то есть уравнение вида **x^2+bx+c=0**) называется **приведённым квадратным уравнением**.

Неполные квадратные уравнения (хотя бы один из коэффициентов **b** или **c** равен нулю):

1) **b=c=0**: **ax^2=0**.

Единственный корень **x=0**.

2) **b=0**, **c≠0**: **ax2+c=0**.

Это уравнение равносильно уравнению $x^2=-\frac{c}{a}$.

Если $\frac{c}{a}>0$, то $-\frac{c}{a}<0$ и уравнение не имеет корней.

Если $\frac{c}{a}<0$, то $-\frac{c}{a}>0$ и уравнение имеет 2 корня:

$$x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}};$$

$$x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

3) **b≠0**, **c=0**: **ax^2+bx=0**.

Это уравнение равносильно уравнению **x(ax+b)=0**.

Оно имеет 2 корня: $x_1=0$ и $x_2=-\frac{b}{a}$.

В общем виде квадратное уравнение **ax^2+bx+c=0**

1) при $D=b2-4ac\geq 0$ имеет корни $\mathbf{x}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$;

2) при $D=b2-4ac<0$ не имеет корней.

Выражение **D=b2–4ac** называется **дискриминантом** квадратного уравнения **ax^2+bx+c=0**.

Теорема Виета: Если x_1 и x_2 — корни приведённого квадратного уравнения **x^2+px+q=0**, то

$$x_1+x_2=-p$$

$$x_1\cdot x_2=q$$

Обратная теорема Виета: Если числа x_1 и x_2 таковы, что $x_1+x_2=-p$, а $x_1\cdot x_2=q$, то эти числа являются корнями уравнения **x^2+px+q=0**.

Пример 1.
Решите уравнение **x^2-2x-3=0**
Решение.
D=b2–4ac=(-2)^2–4•1•(-3)=4+12=16=4^2

$$\mathbf{x}=\frac{-(-2)\pm\sqrt{4^2}}{2\bullet 1}=\frac{2\pm 4}{2}$$

$$x_1=\frac{2-4}{2}=-2;$$

$$x_2=\frac{2+4}{2}=3.$$

Ответ: **-1**; **3**.

Пример 2.
Найдите сумму квадратов корней уравнения **x2+5x+1=0**.
Решение.
Если x_1 и x_2 — корни данного квадратного уравнения. Тогда по теореме Виета

$$x_1+x_2=-5$$
$$x_1\bullet x_2=1$$
$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(-5)^2-2\bullet 1=25-2=23.$$

Ответ: **23**.

Пример 3.
Решите уравнение

$$\frac{2x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x-2}=2$$

Решение.

$$\frac{2x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x-2}=\frac{(2x+1)(x-2)-(x+1)(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2x^2-3x-2-x^2+1}{x^2-3x+2}=\frac{x^2-3x-1}{x^2-3x+2};$$

$$\frac{x^2-3x-1}{x^2-3x+2}=2$$

$$x^2-3x-1=2x^2-6x+4;$$

$$x^2-3x+5=0;$$

$$D=9-4\bullet 5=-11<0$$

Уравнение не имеет корней
Ответ: нет корней.

4. Неравенства с одной переменной и их системы

Общий способ сравнения чисел:
Число **a** больше числа **b** (**a>b**), если их разность **a–b** – положительное число; число **a** меньше числа **b**, если их разность **a-b** – отрицательное число.
Свойства числовых неравенств:
1) Если **a>b**, то **b<a**; если **a<b**, то **b>a**;
2) Если **a<b** и **b<c**, то **a<b<c**;
3) Если **a<b** и **c∈R** , то **a+c<b+c**;
4) Если **a<b** и **c>0**, то **ac<bc**; если **a<b** и **c<0**, то **ac>bc**;
5) Если **a<b** и **c<d**, то **a+c<b+d**;
6) Если **a<b** и **c<d**, **a**, **b**, **c**, **d** – положительные числа, то **ac<bd**.

Решение неравенства с одной переменной – это значение переменной, при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить неравенство с одной переменной означает найти все его решения или доказать, что решений нет.

Решение системы неравенств с одной переменной – это значение переменной, при котором верно каждое из неравенств системы.

Решить систему означает найти все её решения или доказать, что решений нет.

Метод интервалов решения неравенств с одной переменной:

Если неравенство имеет вид

$$f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\bullet\ldots\bullet(x-x_n)>0\ (<0),$$

то в каждом из промежутков, на которые область определения разбивается точками $x_1, x_2, \ldots, x_n$, знак функции сохраняется, а при переходе через каждую из точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ её знак меняется.

Пример 1.

Решите неравенство

$$\frac{4x-1}{2}-x\geq 3x+2$$

Решение.

$$\frac{4x-1-2x}{2}\geq 3x+2;$$

$$2x-1\geq 6x+4;$$

$$4x\leq 5;$$

$$x\leq\frac{5}{4}$$

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{5}{4}\right]$.

Пример 2.

Решите систему неравенств.

$$\begin{cases}(2x-3)-3(x-1)\geq 1\\ 2(x+5)-x\leq 3\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}2x-3-3x+3\geq 1,\\ 2x+10-x\leq 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\leq -1,\\ x\leq -7.\end{cases}$$

Ответ: $(-\infty;-7]$.

Пример 3.

Решите неравенство

$$3x^2-x-\frac{5}{4}\geq 0$$

Решение.

Разложим квадратный трёхчлен $3x^2-x-\frac{5}{4}$ на множители. Для этого найдём его корни:

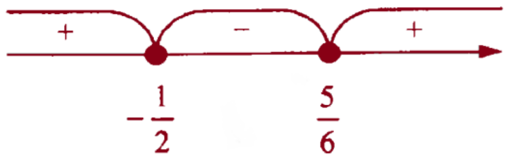
$$D=1+4\bullet 3\bullet\frac{5}{4}=16;$$

$$x=\frac{1\pm 4}{6};$$

$$x_1=-\frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{5}{6}.$$

$$3x^2 - x - \frac{5}{4} = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{5}{6}\right) \geq 0$$



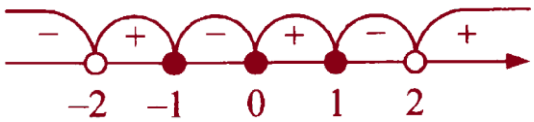
Ответ: $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{5}{6}; +\infty\right)$.

Пример 4.
Решите неравенство

$$\frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \geq 0$$

Решение.

$$\frac{x(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$



Ответ: $(-2; -1] \cup [0; 1] \cup (2; +\infty)$.

ФУНКЦИИ

1. Функции, их свойства.

Линейная функция и обратная пропорциональность

Функция – это такая зависимость переменной **y** от переменной **x**, при которой каждому значению переменной **x** соответствует единственное значение переменной **y**.

Переменная **x** называется независимой переменной или аргументом.

Переменная **y** называется **зависимой** переменной и говорят, что переменная **y** является функцией от переменной **x**.

Область определения функции – это все значения независимой переменной; **область значений функции** – это все значения, которые принимает зависимая переменная.

График функции – это множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

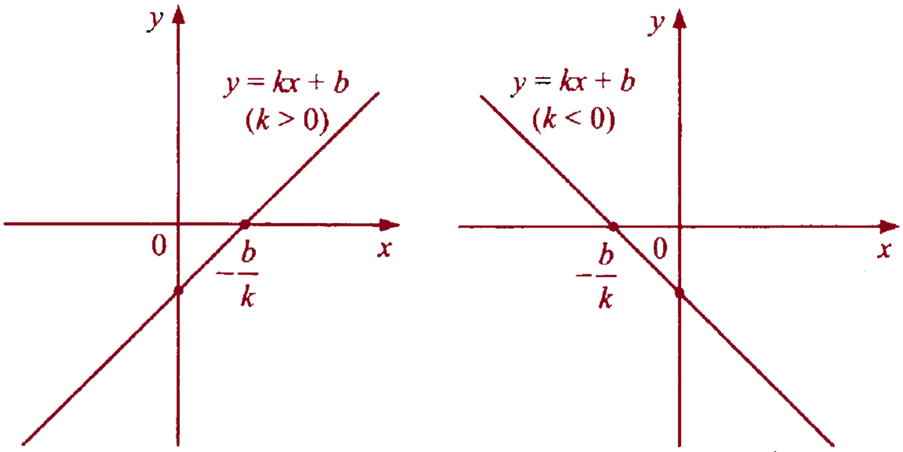
Нули функции – это значения аргумента, при которых функция обращается в нуль.

Функция называется **возрастающей** на некотором промежутке **I**, если для любых **x1, x2∈I** таких, что $x_1<x_2$, верно неравенство $f(x_1)<f(x_2)$.

Функция называется **убывающей** на некотором промежутке **I**, если для любых **x1, x2∈I** таких, что $x_1<x_2$, верно неравенство $f(x_1)>f(x_2)$.

Линейной функцией называется функция, заданная формулой вида **y=kx+b**, где **x** – аргумент, **k,b∈R**. График линейной функции – **прямая**.

Число **k** называется **угловым коэффициентом прямой**.



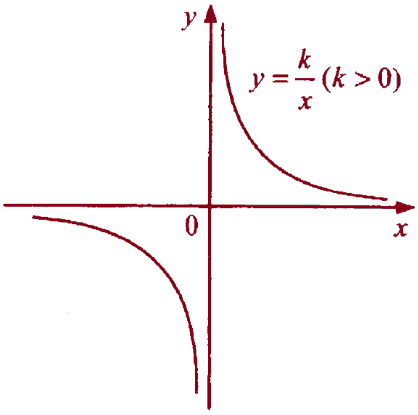
Нуль линейной функции: $x = -\frac{b}{k}$.

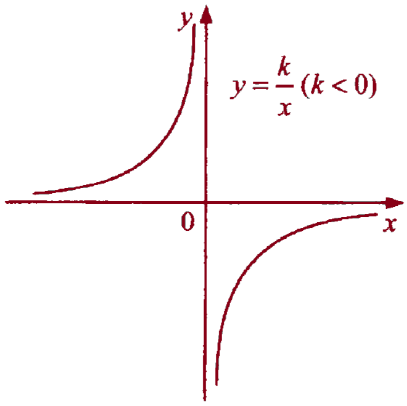
Если **k>0**, то **y>0** при $x > -\frac{b}{k}$ и **y<0** при $x < -\frac{b}{k}$; если **k<0**, то **y>0** при $x < -\frac{b}{k}$ и **y<0** при $x > -\frac{b}{k}$.

При **k>0** функция **y=kx+b** возрастает на **R**, при **k<0** – убывает на **R**.

Обратной пропорциональностью называется функция, заданная формулой $y = \frac{k}{x}$, где **x** – аргумент, **k∈R**, **k≠0**.

Область определения этой функции – **x≠0**.





У функции $y = \frac{k}{x}$ нет нулей.

При **k>0 y>0** при **x>0** и **y<0** при **x<0**;

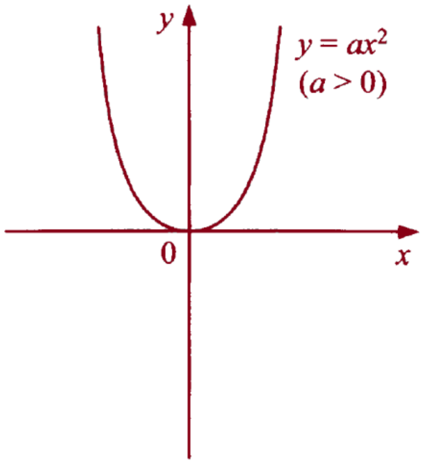
при **k<0 y>0** при **x<0** и **y<0** при **x>0**.

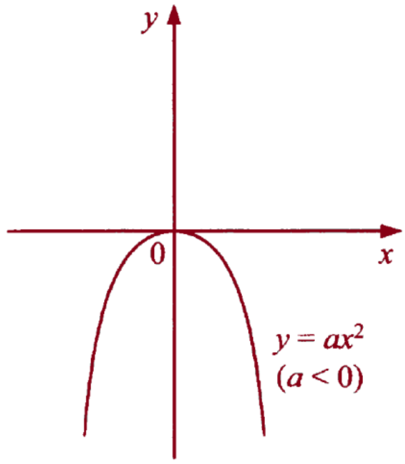
При **k>0** функция $y = \frac{k}{x}$ убывает на всей области определения, при **k<0** функция $y = \frac{k}{x}$ возрастает на всей области определения.

2. Квадратичная функция

Квадратичная функция – это функция, заданная формулой вида **y=ax2+bx+c**, где **x** – аргумент, **a,b,c∈R**, **a≠0**.

Рассмотрим функцию, заданную формулой **$y=ax^2$** (**a≠0**).





Свойства функции **$y=ax^2$**:

1) Если **x=0**, то **y=0**, то есть график функции проходит через начало координат.

2) Если **x≠0**, то **y>0** при **a>0** и **y<0** при **a<0**.

3) График функции симметричен относительно оси **y**.

4) При **a>0** функция убывает на промежутке **(—∞; 0]** и возрастает на промежутке **[0;+∞)**; при **a<0** функция возрастает на промежутке **(-∞;0]** и убывает на промежутке **[0;+∞)**.

5) При **a>0** **$y_{мин}=0$**, при **a<0** **$y_{макс}=0$**.

График функции **$y=ax^2+m$** получается из графика функции **$y=ax^2$** параллельным переносом вдоль оси **y** на **n** единиц вверх при **n>0** или на **(-n)** единиц вниз, если **n<0**.

График функции **$y=a(x–m)^2$** получается из графика функции **$y=ax^2$** параллельным переносом вдоль оси **x** на **m** единиц вправо при **m>0** или на **(-m)** единиц влево, если **m<0**.

Вершина параболы – это точка пересечения параболы с её осью симметрии.

Вершина параболы **$y=ax^2+bx+c$** имеет координаты $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$.

3. Степенная функция

Функция **y =f(x)** называется **чётной**, если область её определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента x выполняется равенство **f(-x)=f(x)**. График любой чётной функции симметричен относительно оси **y**.

Функция **y=f(x)** называется **нечётной**, если область её определения симметрична относительно нуля и для любого значения аргумента x выполняется равенство **f(-x)=-f(x)**. График любой нечётной функции симметричен относительно начала координат.

Степенной функцией с натуральным показателем называется функция, заданная формулой $y=x^n$, где **x** – аргумент, $n\in N$.

Свойства функции $y=x^n$ при чётном **n**(**n=2k**, $k\in N$):

1) Если **x=0**, то **y=0** (график функции проходит через начало координат).

2) Если $x\neq 0$, то $y>0$.

3) Функция является чётной.

4) Функция возрастает на промежутке $[0;+\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty;\ 0]$.

5) Область значений функции – $[0;+\infty)$.

Свойства функции $y=x^n$ при нечётном **n**(**n=2k–1**, $k\in N$):

1) Если **x=0**, то **y=0** (график функции проходит через начало координат).

2) Если $x>0$, то $y>0$; если $x<0$, то $y<0$.

3) Функция является нечётной.

4) Функция возрастает на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

5) Область значений функции – **R**.

ПРОГРЕССИИ И ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен сумме предыдущего члена и одного и того же числа:

$\forall n \in N$ $a_{n+1}=a_n+d$, $d \in R$.

$d=a_{n+1}-a_n$ – разность арифметической прогрессии.

Формула n-го члена арифметической прогрессии:

$a_n=a_1+d_{(n-1)}$.

Формула суммы **n** первых членов арифметической прогрессии:

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\bullet n}{2}=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\bullet n$$

Пример 1. Второй член арифметической прогрессии равен **6**, а восьмой член – **42**. Найдите разность этой прогрессии.

Решение.

$$\begin{cases} a_2=a_1+d=6 \\ a_8=a_1+7d=42 \end{cases}$$

Отсюда: **6d=42-6=36**; **d=6**.

Ответ: **6**.

Пример 2. Найдите **a1** и **d** арифметической прогрессии, если: $a_7=21$, $S_7=205$.

Решение. Так как $S_7=\frac{a_1+a_7}{2}\bullet 7$ (по формуле суммы **7** первых членов арифметической прогрессии), то $205=\frac{a_1+21}{2}\bullet 7$;

Отсюда находим первый член арифметической прогрессии:

$410=7a_1+147$;

$7a_1=263$.

Тогда $a_1=37\frac{4}{7}$.

Так как $a_7=a_1+6_d$, то $21=37\frac{4}{7}+6d$.

Отсюда находим разность арифметической прогрессии:

$$6d=-16\frac{4}{7};$$

$$d=-\frac{58}{21}=-2\frac{16}{21}.$$

Ответ: $a_1=37\frac{4}{7}; d=-2\frac{16}{21}$.

Пример 3.

Решите уравнение **1+6+11+16+...+x=235**.

Решение. Левая часть уравнения представляет собой сумму какого-то числа членов арифметической прогрессии с $a_1=1$; $d=5$.

$$x-a_n=a_1+(n-1)d=1+(n-1)\bullet 5=5n-4$$

$$n=\frac{x+4}{5}$$

$$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\bullet n=\frac{1+x}{2}\bullet\frac{x+4}{5}=235$$

$$x^2+5x+4=2350;$$

$$x^2+5x-2346=0;$$

$$D=25+4\bullet 2346=9409=97^2;$$

$$x=\frac{-5\pm 97}{2} => x=46 \text{ (так как } x>0\text{)}.$$

Ответ: 46.

2. Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – это последовательность отличных от нуля чисел, каждый член которой, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена на одно и то же число:

∀n∈N bn≠0 и **b_n+1=b_n•q**.

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ — знаменатель геометрической прогресси.}$$

Формула **n**-го члена геометрической прогрессии: $b_n=b_1q^{n-1}$.

Формула суммы **n** первых членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_nq - b_1}{q-1} = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}\ (q \neq 1).$$

Если **|q|<1**, то прогрессия называется **бесконечной геометрической прогрессией** и её сумма равна $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Пример 1.

Найдите знаменатель геометрической прогрессии, если её второй член равен **-2**, а седьмой равен **64**.

Решение.

$$\frac{b_7}{b_2} = \frac{b_1q^6}{b_1q} = q^5 = \frac{64}{-2} = -32$$

q=-2

Ответ: **-2**.

Пример 2.

Найдите сумму семи первых членов геометрической прогрессии:

5,10, 20, ...;

Решение. Для решения данного примера необходимо было применить формулу суммы **7** первых членов геометрической прогрессии:

b_1=5; **q=2**. Так как $S_7 = \frac{b_1(1-q^7)}{1-q}$, то

$$S_7 = \frac{5(1-2^7)}{1-2} - 5(1-128) = 635.$$

Ответ: **635**.

Пример 3.

Решите уравнение

$$x^2 - x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$$

Решение. Правая часть – бесконечная геометрическая прогрессия $q = -\frac{1}{3}$.

Поэтому имеем:

$$x^2 - x = \frac{1}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4};$$

$$x^2 - x - \frac{3}{4} = 0;$$

$$D = 1 + 4 \bullet \frac{3}{4} = 4;$$

$$x = \frac{1 \pm 2}{2}; x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = \frac{3}{2}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$.

3. Решение текстовых задач

Остановимся на нескольких стандартных примерах текстовых задач.

Пример 1. Из пункта А в пункт В, расположенный в **24 км** от А, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в пункт В на **4 часа** раньше пешехода. Известно, что если бы велосипедист ехал с меньшей на **4 км/ч** скоростью, то на путь из А в В он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорость пешехода.

Решение.

Скорость велосипедиста	**x км/ч**
Скорость пешехода	**y км/ч**

x; y > 0;

$$\begin{cases} \frac{24}{y} - \frac{24}{x} = 4 \\ \frac{24}{x-4} = \frac{1}{2} \bullet \frac{24}{y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24x - 24y = 4xy \\ 2y = x - 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x - 6y = xy \\ x = 2y + 4 \end{cases}$$

$$6(2y+4)-6y=(2y+4)y;$$

$$12y+24-6y=2y^2+4y;$$

$$2y^2-2y-24=0;$$

$$y^2-y-12=0;$$

$$y_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{1 \pm 7}{2}$$

$$y_1 = -3 - \text{не удовлетворяет условию}$$

$$y_2 = 4; x_2 = 12.$$

Ответ: **4 км/ч**.

Пример 2. **60 деталей** первый рабочий изготавливает на **3 часа** быстрее, чем второй. За сколько часов второй рабочий изготовит **90 деталей**, если, работая вместе, они изготавливают за **1 час 30 деталей**?

Решение.

	за **1 час**
I рабочий	**x деталей**
II рабочий	**y деталей**

$$\begin{cases} \frac{60}{x} + 3 = \frac{60}{y} \\ x + y = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 60(x-y) = 3xy \\ x = 30 - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 20(x-y) = xy \\ x = 30 - y \end{cases}$$

$$20(30-2y) = y(30-y)$$

$$600 - 40y = 30y + y^2 = 0$$

$$y^2 - 704 + 600 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{35 \pm \sqrt{225-600}}{1} = 36 \pm 25$$

$$y_1 = 60 - \text{не удовлетворяет условию}$$

$$y_2 = 10;\ x_2 = 20$$

$$\frac{90}{10} = 9 \text{ часов}$$

Ответ: **9 ч**.

Пример 3.

Вкладчик сначала снял со своего счёта в сбербанке $\frac{1}{5}$ своих денег, потом $\frac{5}{16}$ оставшихся и ещё **999** рублей. После этого у него на счёте в сбербанке осталась $\frac{1}{4}$ всех денег. Каким был первоначальный вклад?

Решение.

Пусть первоначальный вклад был х рублей. Тогда в первый раз вкладчик снял $\frac{x}{5}$ руб., после чего осталось $x - \frac{x}{5} = \frac{4x}{5}$ руб.; во второй раз он снял $\frac{5}{16} \bullet \frac{4}{5}x + 999 = \left(\frac{1}{4}x + 999\right)$ руб. После чего у него осталось $\frac{1}{4}x$ руб. Составим и решим уравнение:

$$\text{x} - \frac{\text{x}}{5} - \left(\frac{1}{4}x + 999\right) = \frac{1}{4}x$$

$$\left(1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right)\text{x} = 999$$

$$\frac{3}{10}\text{x} = 999$$

$$\text{x} = 3330$$

Ответ: **3330** рублей.

Пример 4. Двузначное число в **4** раза больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы в **2,25** раза больше самого числа. Найдите это число.

Решение.

$$\overline{ab} = 10a + b, a \in N, b \in \{0; N\}$$

$$\begin{cases} 10a + b = 4(a+b) \\ (a+b)^2 = 2,25(10a+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{b} = 2a \\ (a+b)^2 = 2,25(10a+b) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{b} = 2a \\ (3a)^2 = 2,25 \bullet 12a \end{cases}$$

$$9a^2 = 27$$

$$a = 3 \text{ (так как } a \neq 3), b = 6.$$

Ответ: **36**.

Пример 5. Из **40 тонн** железной руды выплавляют **20 тонн** стали, содержащей **6%** примесей. Каков процент примесей в руде?

Решение.

	в %	в кг	Руда
100%	**40 т**	Примеси	**х%**
(40 – 20) т	Сталь	**100%**	**20 т**
Примеси	**6%**	?	

1) $\frac{20 \bullet 6\%}{100\%} = 1,2$ т – примеси в стали;

2) **40 – 20=20 т**

20+1,2=21,2 т – примеси в руде;

$\frac{21,2}{40} \bullet 100\% = \frac{212}{4} = 53\%$ – примеси в руде.

Ответ: **53%.**