Маріупольській машинобудівний коледж ДНВЗ «ПДТУ»

Методичні вказівки. ЕП 16-01

Тематичний план. 5.03050401 «Економіка підприємства »

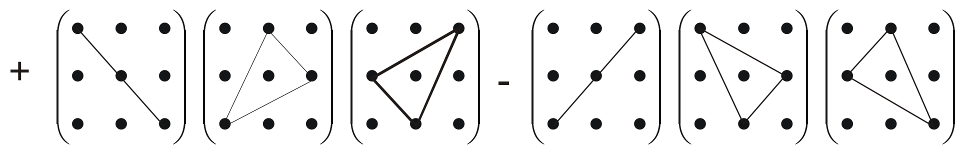
1.Елементи теорії матриць і визначників.

1. Матрицею розмірності $m * n$ називається прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ Числа a_{ij} (i=1, … , m; j=1, …, n) називаються елементами матриці А. Перший індекс указує номер рядка, другий – номер стовпця. Якщо $m \neq n$, матриця називається прямокутною , якщо $m = n$ – квадратною.
2. Кожній квадратній матриці ставиться у відповідність число, яке називається Її визначником.

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ - визначник другого порядку.

$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}}$ - визначник третього порядку.

Правило трикутників (Сарруса) обчислення визначників третього порядку.



Мінором M_{ij} елемента визначника n -го порядку $|A|$ називається визначник порядку n-1, який ми одержимо з визначника $|A|$, якщо закреслимо i-й рядок та j –й стовпець.

Алгебраїчне доповнення A_{ij} елемента a_{ij} визначається формулою $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

3. Добутком матриці А розмірності $m*p$ та матриці $p*n$ називається матриця С розмірності $m * n$, якщо кожний елемент c_{ij} дорівнює добутку i- го рядка матриці А на j –й стовпець матриці В: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots a_{in}b_{nj}$ Приклад:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot1+2\cdot2 & 3(-1)+2\cdot0 & 3\cdot3+2\cdot4 \\ 2\cdot1+0\cdot2 & 2(-1)+0\cdot0 & 2\cdot3+0\cdot4 \\ 1\cdot1+5\cdot2 & 1(-1)+5\cdot0 & 1\cdot3+5\cdot4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -3 & 17 \\ 2 & -2 & 6 \\ 11 & -1 & 23 \end{pmatrix}$$

$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - одинична матриця. Матриця називається оберненою до матриці А, якщо виконується умова: $A^{-1}A = E = AA^{-1}$. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$.Для відшукання оберненої матриці користуються таким алгоритмом:

- Обчислюють визначник матриці А
- Складають матрицю алгебраїчних доповнень елементів даної матриці
- Транспонують матрицю
- Кожний елемент транспонованої матриці ділять на визначник даної матриці.

Приклад1: Обчислити обернену матрицю: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}$, $|\ A\ |=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{vmatrix}=14$,

A_{11}=-7;A_{12}=6;A_{13}=3;A_{21}=-14;A_{22}=-2;A_{23}=6;A_{31}=7;A_{32}=-2;A_{33}=-1.

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}.$$

Приклад1.2: Побудувати матрицю, обернену до матриці $A=\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$.

Обчислимо:

$\Delta(A)=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 10 & -5 & 0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 10 & -5\end{vmatrix}=15-10=5$. $\Delta(A)\neq 0$ — обернена матриця існує.

$A_{11}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 4\end{vmatrix}=5$, $A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & 4\end{vmatrix}=10$, $A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=0$, $A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ -1 & 4\end{vmatrix}=4$, $A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 2 & 4\end{vmatrix}=12$,

$A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=1$, $A_{31}=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1$, $A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3$, $A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=1$.

$$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5 & 4 & -1\\ 10 & 12 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5}\\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки.

1. Що називається визначником?
2. Що називається матрицею? Як визначаються лінійні операції над матрицями?
3. Основні властивості визначників. Способи обчислення визначників.
4. Що називається добутком двох матриць? Що таке ранг матриці?

2.Загальна теорія систем лінійних рівнянь

1. Рішення систем лінійних рівнянь за формулами Крамера:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2\\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3\end{cases} \text{ та } x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta};\ x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta};\ x_3=\frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}, \text{ де}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0,\ \Delta_{x_1}=\begin{vmatrix}b_1 & a_{12} & a_{13}\\ b_2 & a_{22} & a_{23}\\ b_3 & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix},\ \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix}a_{11} & b_1 & a_{13}\\ a_{21} & b_2 & a_{23}\\ a_{31} & b_3 & a_{33}\end{vmatrix},\ \Delta_{x_3}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & b_1\\ a_{21} & a_{22} & b_2\\ a_{31} & a_{32} & b_3\end{vmatrix}$$

2. Рішення систем лінійних рівнянь методом Гауса: перетворення складається з декількох кроків, на кожнім з який виключається одне невідоме, для чого можна додавати до обох частин одного рівняння інше рівняння системи, помножене на деяке число.

3. Матричний спосіб розв’язування систем лінійних рівнянь:$X=A^{-1}B$ Т.ч., для того щоб розв’язати матричне рівняння, треба:
   - Скласти матрицю з коефіцієнтів при невідомих A і знайти A^{-1};
   - Обчислити добуток оберненої матриці на матрицю вільних членів;
   - Користуючись означенням рівних матриць, записати відповідь.

Приклад 1. Розв'язати по формулах Крамера систему рівнянь :

$\begin{cases} x-y+z=5 \\ 2x+y+z=6 \\ x+y+2z=4 \end{cases}$ Визначник цієї системи: $D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=5\neq 0$. Обчислимо

$D_x=\begin{vmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}=15;\ D_y=\begin{vmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-5;\ D_z=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}=5$. Звідси

$x=\frac{D_x}{D}=3; y=\frac{D_y}{D}=-1; z=\frac{D_z}{D}=1$.

Приклад 2. Розв'язати методом Гауса систему рівнянь:

$$\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+2z=8 \\ 5x-3y+2z=5 \\ x+3y+3z=16 \end{cases} \quad 1)\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+2z=8 \\ 11y+16z=70 \\ \frac{5}{2}y+z=8 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} x+\frac{1}{2}y+2z=8 \\ 11y+16z=70 \\ 29z=87 \end{cases}$$

- З першого рівняння системи знаходимо x і підставляємо його в друге і третє рівняння. У результаті отримаємо нову систему 1).
- З другого рівняння системи 1) знаходимо у і підставляємо його в третє рівняння
- Виконуючи зворотний хід у системі 2), отримаємо x=1, y=2,z=3.

*Приклад 3.*Розв’язати рівняння матричнім способом:

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+3x_3=1 \\ x_1+3x_2+2x_3=4 \\ 3x_1-5x_2+4x_3=1 \end{cases};\_\ A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{vmatrix}=-6;\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=-\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 22 & 1 & -17 \\ 2 & -1 & -1 \\ -14 & -2 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.1 Розв’язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1-x_2=1 \\ -2x_1+x_2+x_3=-1 \\ 2x_2-x_2+4x_3=-4 \end{cases}$$

методом оберненої матриці.

Запишемо систему в матричному вигляді $AX=B,$ де

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Для матриці *A* обернену ми побудували в попередньому прикладі, тому маємо:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-\frac{4}{5}+\frac{4}{5} \\ 2-\frac{12}{5}+\frac{12}{5} \\ 0-\frac{1}{5}-\frac{4}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Питання для самоперевірки.

1. Основні властивості визначників.
2. Опишіть методи Гауса , Крамера, матричний розв'язування систем лінійних рівнянь.

2. Лінії на площині.

Метод координат, вектори. Лінія і пряма на площині. Лінії іншого порядку. Пряма і площина в просторі.

2.1. Три взаємно перпендикулярні осі *Ox, Oy, Oz*, які мають спільний початок точку *O* і однакову масштабну одиницю, утворюють прямокутну декартову систему координат у просторі. Якщо таких осей дві: *Ox* і *Oy*, то маємо систему координат на площині.

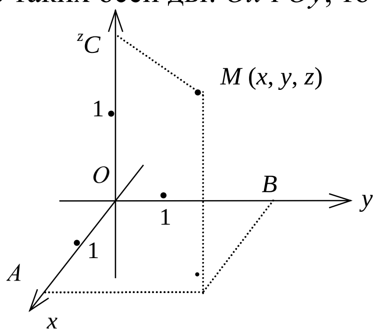


Рис.1

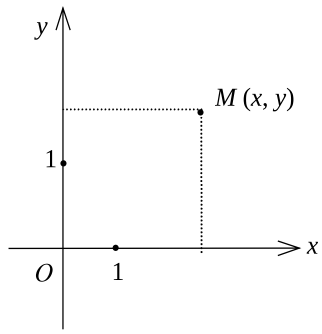


Рис.2

Осі *Ox, Oy, Oz* називаються відповідно *осями абсцис, ординат і аплікат*, точка *O* — *початок системи координат*. Нехай *M* — довільна точка в просторі або на площині. Декартовими координатами *x, y, z* точки *M* називатимемо відповідно довжини *OA, OB, OC* напрямлених відрізків $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$.

Таким чином, кожній точці простору відповідає впорядкована трійка чисел (*x, y, z*), а на площині — впорядкована пара чисел (x, y), тобто встановлюється відповідність між геометричним образом — точкою і впорядкованою множиною чисел. Ця відповідність дає можливість використовувати рівняння для відображення геометричних образів, таких як лінія, площина тощо, та застосовувати алгебраїчні методи для розв'язування геометричних задач.

Означення. Скалярним добутком двох ненульових векторів і називається число (скаляр), яке дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоча б один із векторів дорівнює нулю, то кут між векторами не визначений і за означенням скалярний добуток дорівнює нулю.

Отже:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi$$

Означення. Векторним добутком вектора $\vec{a}$ *на вектор* $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, якщо:

1) *довжина вектора* $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, де φ — кут між двома векторами;

2) *вектор* $\vec{c}$ *перпендикулярний* до кожного з векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) *вектор* $\vec{c}$ *спрямований* так, що коли дивитися з його кінця на площину, в якій лежать вектори і, то поворот вектора до вектора відбувається на найменший кут проти годинникової стрілки.

Модуль векторного добутку двох неколінеарних векторів дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах як на сторонах.

Означення. Мішаним добутком векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, яке дорівнює скалярному добутку вектора $\vec{a}$ на векторний добуток векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$, тобто $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$.

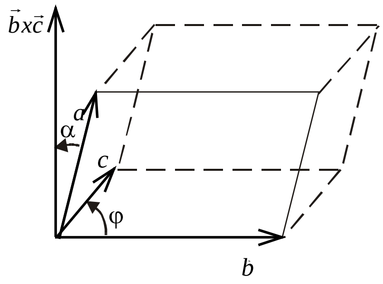


Рис. 3

Розглянемо геометричний зміст змішаного добутку. Для цього побудуємо на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, вважаючи, що вони не лежать в одній площині, тобто не компланарні, паралелепіпед. Модуль мішаного добутку чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$.

Вектори в просторі. *Якщо вектори компланарні,* то їх мішаний добуток у координатах дорівнює нулю.

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0.$$

Означення. Рівняння $F(x, y) = 0$ називається *рівнянням деякої лінії в заданій системі координат*, якщо це рівняння задовольняють координати (x, y) будь-якої точки, що лежить на цій лінії, і не задовольняють координати жодної точки, що не лежить на цій.

Приклад1. Знайти $Пр_{\vec{b}}\vec{a}$, коли $\vec{a}$ (1;-3), $\vec{b}$ (2;0). $Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{(\vec{a};\vec{b})}{|\vec{b}|}=\dfrac{1\cdot 2+(-3)\cdot 0}{\sqrt{1+9}\sqrt{4+0}}=\dfrac{2}{2\sqrt{10}}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

1. Загальне рівняння прямої: $Ax+By+C=0$.

Рівняння прямої в відрізках: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = кx+в$

Канонічне рівняння прямої: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Питання для самоперевірки.

1. Як записується рівняння прямих ліній: у загальному виді; з кутовим коефіцієнтом; у відрізках на осях?
2. Як формулюються умова паралельності і перпендикулярності двох прямих?

3.Лінії в просторі

1. Рівняння лінії і поверхні у простори. Загальне рівняння площині Ax+By+Cz+D=0.

   Параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

   Канонічні рівняння прямої: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

   Кут між прямою та площиною: $\sin\varphi=\dfrac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$

   Перетин прямої і площини: $(Am+Bn+Cp)t+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0$.

   Відстань від точки M_0 до площині Ax+By+Cz+D=0: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Приклад 1. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$ і площині 3x-2y+z-3=0.

Перейдемо від канонічних рівнянь прямої до параметричних: x=-1+2t; y=2+t;z=1-t. Підставимо значення x,y і z в рівняння площини: 3(-1+2t)-2(2+t)+(1-t)-3=0, звідки знайдемо, що t=3. Підставивши отримане значення t в параметричні рівняння прямої, знайдемо координаті точки перетину: x=5,y=5, z=-2.

Приклад 2. Перевірити , чи компланарні вектори $\vec{a}$ (-1;-1;6), $\vec{b}$ (-2;0;2) $\vec{c}$ (1;-1;4)?

$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0$, отже вектори компланарні.

Приклад 3. Знайти об'єм піраміді по відомим координатам Ії вершин. A=(5;1;-4), B=(1;2;-1), C=(3;3;-4), D=(2;2;2).

$\vec{AB}(-4;1;3); \vec{AC}(-2;2;0); \vec{AD}(-3;1;6)$, тоді $V=\pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}=4$ (куб. од).

*Приклад 4.*Обчислити відстань від точки $M_0(-1;1;-2)$ до площині 2x-3y+6z-11=0.

$$d=\frac{|2\cdot(-1)-3\cdot 1+6\cdot(-2)-11|}{\sqrt{4+9+36}}=4.$$

*Приклад 5.*Скласти рівняння площини, що проходить через три точки: A=(3;0;4), B=(5;2;6), C=(2;3;-3)

Нехай M(x;y;z) – довільна точка площини. Тоді мішаний добуток трьох векторів, дорівнює нулю.(AM,AB,AC)=0. Тобто $\begin{vmatrix} x-3 & y & z-4 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -7 \end{vmatrix}=0$. Звідси маємо 5x-3y-2z=0.

Питання для самоперевірки.

1. Які види рівнянь прямих і площин ви знаєте?
2. Як виробляється скалярне, векторне, змішане множення векторів?

4.Лінії другого порядку.

Канонічне рівняння кола: $x^2+y^2=R^2$, Рівняння кола з центром в точці $(x_0;y_0)$: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$.

Канонічне рівняння еліпса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$,де a - велика піввісь еліпса; b – мала піввісь ; x і y – поточні координати точок еліпса.

Рівняння еліпса з осями паралельними до осей координат, і з центром в точці $(x_0;y_0)$:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

Канонічне рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$,

Спряжені гіперболи: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і $\frac{x_2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$.

Рівняння гіперболи з осями паралельними до осей координат, дійсна вісь паралельна оси абсцис і з центром в точці $(x_0;y_0)$: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Канонічне рівняння параболи $y^2=2px$. $F\left(\frac{p}{2};0\right)$;

Якщо парабола симетрична відносно оси ординат, а вершина міститься в початку координат, то Ії рівняння має вигляд $x^2=2py$.

Якщо парабола симетрична відносно прямої $y=y_0$ а вершина міститься в точці $(x_0;y_0)$, то Ії рівняння має вигляд $(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$.

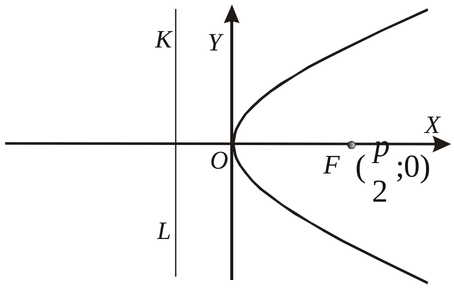
Якщо парабола симетрична відносно прямої $x=x_0$,а вершина міститься в точці $(x_0;y_0)$, то Ії рівняння має вигляд $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$.

Приклад 3. Встановити вид кривої $x^2-4x+4y+12=0$.

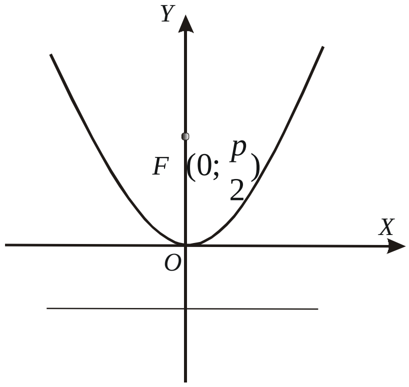
Якщо виділити повний квадрат, то отримаємо (x-2)^2=-4(y+2). Отже парабола з вершиною в точці (2;-2) і параметром p=2.

Парабола.

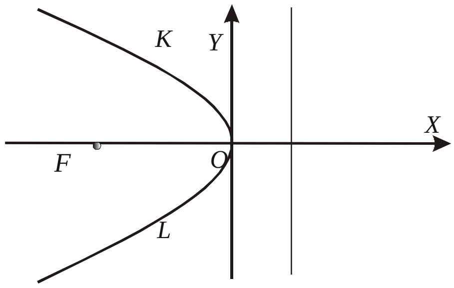
$y^2 = 2px$



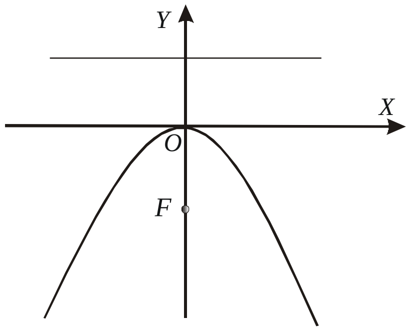
$x^2 = 2py$



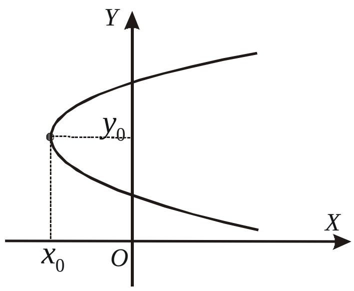
$y^2 = -2px$



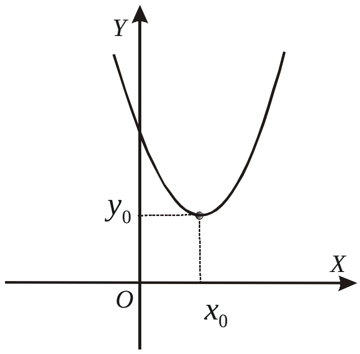
$x^2 = -2py$



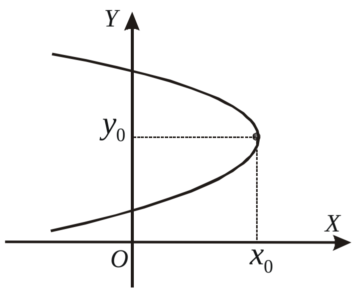
$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$



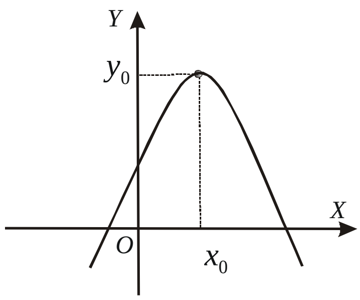
$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$



$(y - y_0)^2 = -2p(x - x_0)$



$(x - x_0)^2 = -2p(y - y_0)$



Питання для самоперевірки.

1. Напишіть рівняння рівнобічної гіперболи. Напишіть рівняння асимптот гіперболи.
2. Що називається ексцентриситетом еліпса і яка його величина в порівнянні з одиницею.
3. Які гіперболи називаються спряженими?
4. Дайте визначення окружності, еліпса, гіперболи і параболи.

Частина друга.

Границя функції.

Границя послідовності.

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;\ \lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n},\ \text{ÿêù î}\ \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$$

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad 2.\ \lim_{n\to\infty} q^n = 0; |q| < 1 \quad 3.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1; a > 0 \quad 4.\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1 \quad 5.\ \lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$$

$$6.\ \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0 \qquad 7.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n} = 0; a > 1 \qquad 8.\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e; e \approx 2{,}71828...$$

Границя функції.

Змінна величина x називається *нескінченно малою*, якщо в процесі Її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної x стає і залишається менше будь якого, скільки завгодно малого, наперед заданого додатного числа ε, тобто $|x| < \varepsilon$.

Властивості нескінченно малих величин.

1. Алгебраїчна сума скінченої кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.
2. Добуток сталої величини або обмеженої величини на нескінченно малу величину є величина нескінченно мала.
3. Добуток скінченої кількості нескінченно малих величин є величина нескінченно мала.

Змінна величина x називається *нескінченно великою*, якщо в процесі Її зміни наступить такий момент, починаючи з якого, абсолютна величина змінної x стає і залишається більше будь якого, скільки завгодно великого , наперед заданого додатного числа N, тобто $|x| > N$.

Зв'язок між нескінченно великими і нескінченно малими величинами.

Якщо x нескінченно велика величина, то $y = \frac{1}{x}$ буде нескінченно малою.

Якщо y - нескінченно мала і $y \neq 0$, то $x = \frac{1}{y}$ буде нескінченно великою.

Постійна величина a називається границею змінної x, якщо абсолютна величина різниці $x - a$ є величиною нескінченно малою, тобто $|x - a| < \varepsilon$.

Границя функції.

$$1.\ \lim_{x\to a} C = C \quad 2.\ \lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x) \quad 3.\ \lim_{x\to a}(C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

$$4.\ \lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x) \quad 5.\ \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)};\quad \textit{якщо}\quad \lim_{x\to a} f(x) \neq 0.$$

$$6.\ \lim\big(\log_a x\big) = \log_a\big(\lim x\big);$$

Стандартні границі.

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \quad 2.\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad 3.\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \quad 4.\ \lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 1 \quad 5.\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x} = k$$

$$6.\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a \qquad 7.\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$$

Еквівалентні нескінченно мали

$$1.\ \sin x \approx x \approx tgx \approx \arcsin x \approx arctgx \approx \ln(1+x) \approx e^x - 1$$

$$2.\ 1 - \cos x \approx \frac{x^2}{2};\ 3.\ (1+x)^\alpha - 1 \approx \alpha x;\ 4.\ a^x - 1 \approx x\ln a;\ 5.\ \sqrt[n]{1+x} - 1 \approx \frac{x}{n}$$

При обчисленні границі елементарної функції $f(x)$ приходиться зштовхуватися з двома істотно різноманітними типами прикладів.

1) Функція $f(x)$ визначена в граничній точці $x=a$. Тоді $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
2) Функція $f(x)$ не визначена в граничній точці $x=a$ або обчислюється границя функції при $x\to\infty$ (невизначеності $\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty};0\cdot\infty;\infty-\infty;1^{\infty}$ й ін.).

Розкриття деяких видів невизначеностей.

Невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Для розкриття цієї невизначеності потрібно винести в чисельнику і знаменнику старший ступінь змінної.

Приклад 1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+6x+1}{8x^2+2x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(8+\frac{2}{x}-\frac{5}{x^2}\right)}=\frac{1}{8}.$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$. Щоб позбутися від невизначеності, потрібно перетворити дріб, виділяючи у чисельнику і знаменнику т.н. „критичний множник " і скоротити на нього дріб.

Приклад 2. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-5x+4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-4)(x-1)}{(x-2)(x-1)}=\frac{1-4}{1-2}=-3.$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$.Перетворення зводиться до знищення ірраціональності шляхом домноження дробу на спряжений вираз.

Приклад 3. $$\lim_{x\to 0}\frac{3-\sqrt{x+9}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(3-\sqrt{x+9}\right)\left(3+\sqrt{x+9}\right)}{x\left(3+\sqrt{x+9}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{-x}{x\left(3+\sqrt{x+9}\right)}=-\frac{1}{6}.$$

Невизначеність $\frac{0}{0}$.Спочатку за допомогою тригонометричних формул зробимо перетворення, а потім використовуючи першу стандартну границю обчислимо задану границю.

Приклад 4. $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\cos 5x}{x\sin 4x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x\cdot\sin 3x}{x\sin 4x}=2\cdot 2\cdot\frac{3}{4}=3.$$

Невизначеність 1^{∞}.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x+1}{4x-5}\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x+1}{4x-5}-1\right)^{3x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{6}{4x-5}\right)^{\frac{4x-5}{6}\cdot\frac{6(3x+1)}{4x-5}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6(3x+1)}{4x-5}}=e^{\frac{9}{2}}$$

Питання для самоперевірки.

1. Сформулюйте визначення границі послідовності і границі функції, основні теореми про границі.
2. Як зв'язане поняття границі функції з її однобічними границями?
3. Яка функція називається нескінченно малої і які її основні властивості? Яка функція називається нескінченно великий і яка її зв'язок з нескінченно малої?

6.Похідна функції.

Похідна на прикладі фізичного і геометричного змісту вираження. Застосування похідної. Диференціал функції і його застосування. Основні теореми диференціального числення. Похідні і диференціали вищих порядків.

Похідною функції y=f(x) в точці x=x_0 називається швидкість змінювання функції в цій точці. Воно дорівнює границі відношення приросту функції до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля. Операція знаходження похідної називається діференцюванням функції; функція яка має похідну у цій точці, називається діференційовною у цій точці.

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_x = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

.Основні правила диференціювання.

1. $C' = 0, (C = const)$ 2. $(C \cdot U)' = C \cdot U'$ 3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$

4. $(U \cdot V)' = U' \cdot V + V' \cdot U$ 5. $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - V'U}{V^2}$.

Похідна складеної функції.

Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$,то $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

Похідна оберненої функції: $x'_y = \frac{1}{y'_x}$.

Похідна функції, заданої параметрично.

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha < t < \beta \text{ ,t - параметр; } y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Похідна другого порядку функції, заданої параметрично.

$$y'' = \frac{y''_t x'_t - y'_t x''_t}{(x'_t)^3} .$$

Таблиця похідних.

1. $(x^n)' = nx^{n-1}$; 1а). $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; 1б). $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$; 2. $(a^x)' = a^x \ln a$;

2а). $(e^x)' = e^x$;

3. $(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$; 3а). $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; 4. $(\sin x)' = \cos x$; 5. $(\cos x)' = -\sin x$;

1) $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$; 7. $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$; 8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 10. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$; 11. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$;

12. $(shx)' = chx$; 13. $(chx)' = shx$; 14. $(thx)' = \frac{1}{ch^2 x}$; 15. $(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}$.

Логарифмічна похідна.

При перебуванні похідних від показової-степеневої функції, а також інших громіздких виражень, що допускають логарифмування зручно застосовувати логарифмічну похідну, тобто похідну від логарифма цієї функції:

$(\ln y)' = \frac{y'}{y}$, тоді похідна показової-степеневої функції має вид - $(u^v)' = u^v \cdot v' \cdot \ln u + u^{v-1} \cdot u' \cdot v$.

Приклад1. Обчисліть похідну. $y=x^{\sin x}$

$$\ln y = \ln x^{\sin x} \Rightarrow \ln y = \sin x \cdot \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \Rightarrow y' = x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}).$$

Діференцювання неявної функції.

Щоб знайти похідну від неявної функції треба:

1) Продіференцювати кожний доданок, що входить у рівняння.

2) При цьому до виразів, які містять у, треба застосувати правило диференціювання складеної функції.
3) Із отриманої рівності знаходимо y' .

Приклад2. Знайти y' : $x^2+y^2-25=0$.

$2x+2y\,y'=0$; $y'=-\dfrac{x}{y}$.

Приклад 3. Знайти похідну функції y=lncos5x.

Спочатку скористаємося формулою $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}$, $y'=\dfrac{(\cos 5x)'}{\cos 5x}$. Потім застосуємо формулу $\left(\cos x\right)'=-\sin x$, $y'=\dfrac{-\sin 5x\cdot(5x)'}{\cos 5x}$.Нарешті, виносимо сталий множник і отримаємо:

$y'=\dfrac{-\sin 5x\cdot 5}{\cos 5x}=-5tg5x$.

Питання для самоперевірки

1. Дайте визначення функції і приведіть приклади функціональної залежності.
2. Перелічите загальні правила диференціювання і формули диференціювання основних елементарних функцій.
3. Для яких функцій доцільно використовувати логарифмічне диференціювання?
4. Що називається диференціалом функції, диференціалом незалежної змінної?
5. Дайте визначення похідної другого порядку, назвіть її механічний зміст.
6. Сформулюйте правило обчислення похідної складеної функції.
7. Як знайти першу і другу похідні функції, заданої параметрично?
8. У чому полягає властивість інваріантності форми диференціала функції?
9. На чому засноване застосування диференціала в наближених обчисленнях?

7.Основні теореми диференціального числення.

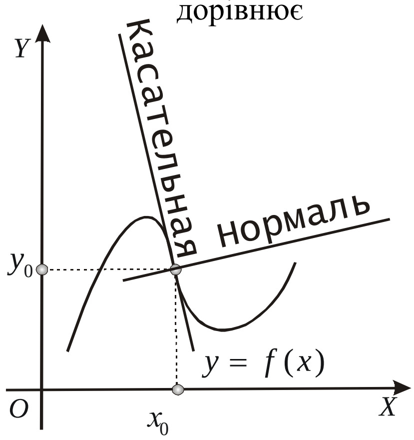
Область визначення, межа і безперервність функції. Графіки. Екстремумі функції. Опуклість та угнутість.

Дотична та нормаль до кривої.

Геометричний зміст похідної – кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює значенню похідної в точці дотику.

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$.

Нормаль це пряма, проведена через точку дотику перпендикулярно дотичній. $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.



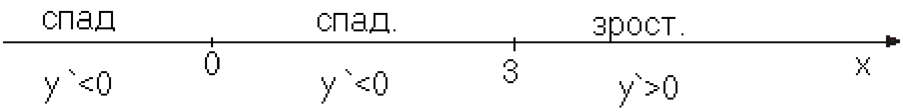
Зростання та спадання функцій.

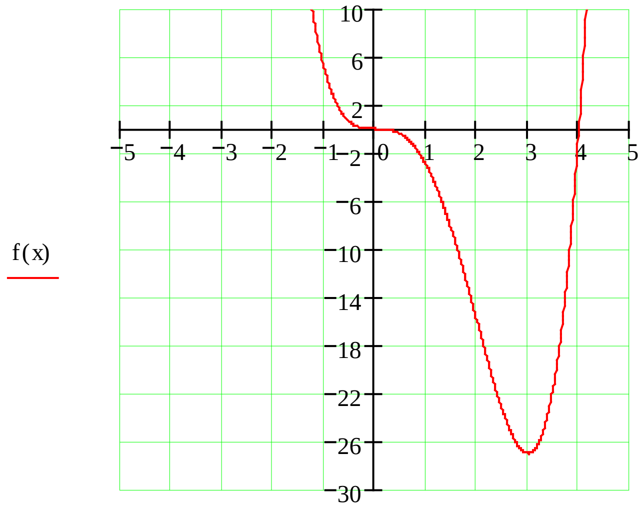
Щоб знайти інтервали зростання та інтервали спадання функції потрібно зробити наступне:

- Знайти похідну f`(x), потім знайти всі значення x, при яких f`(x)=0 тобто критичні точки.
- Позначити на числовій осі точки розриву та критичні точки. Тоді область визначення функції буде розбита на декілька інтервалів.
- В кожному інтервалі обрати одне значення x та знайти знак f`(x) в обраної точці. Якщо похідна додатна, то функція зростає, якщо від'ємна – то спадає.

Приклад 1. Дослідити на зростання та спадання функцію $y=x^4-4x^3$.

$y'=4x^3-12x^2$; $4x^3-12x^2=0$, $x_1=0, x_2=3$.





Відшукання *найбільшого та найменшого* значення функції на даному відрізку.

Щоб знайти найбільше та найменше значення функції на даному відрізку, треба порівняти між собою значення функції в усіх критичних точках, що належать відрізку, і на кінцях відрізка.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = \frac{1}{4}x^4 - x^3$ на відрізку $[0;4]$.

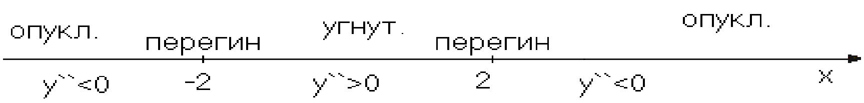
$y' = x^3 - 3x^2$, $x^3 - 3x^2 = 0$; $x_1 = 0, x_2 = 3$; $y(0) = 0$, $y(3) = -6{,}75$, $y(4) = 0$. Отже 0 - найбільше, -6,75 - найменше значення функції.

Дослідження графіка функції на опуклість та угнутість.

Якщо в усіх точках інтервалу друга похідна додатна, то графік функції угнутий, якщо в усіх точках інтервалу друга похідна від'ємна – опуклий.

Приклад 5. Дослідити функцію на опуклість та угнутість. $y = \ln(x^2 + 4)$.

$y' = \dfrac{2x}{x^2 + 4}$; $y'' = \dfrac{2(4 - x^2)}{(x^2 + 4)^2}$. Нулі (критичні точки) другої похідної: $x_1 = -2, x_2 = 2$.



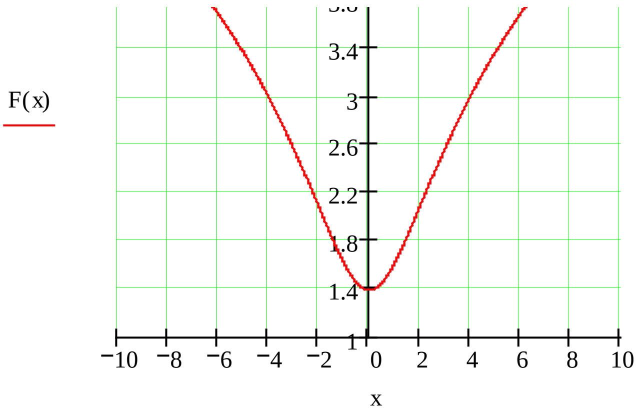


Схема повного дослідження функції.

1) Знайти область визначення функції.
2) Перевірити, чи є функція парною, непарною, періодичною.

3) При наявності точок розриву знайти односторонні границі, побудувати схематично поводження графіка функцій поблизу точок розриву.
4) Знайти проміжки монотонності функції, її екстремуми.
5) Знайти проміжки опуклості й угнутості графіка функції, точки перегину.
6) Знайти асимптоти графіка функції. Знайти, якщо можливо, точки перетинання графіка функції з осями координат.
7) Використовуючи отримані результати, побудувати графік функції.

Асимптоти.

1. Вертикальна $x = a$, якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$
2. Горизонтальна $y = b$, якщо $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.
3. Похила $y = kx + b$, де $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$.

Питання для самоперевірки.

1. У чому полягає геометричне значення похідної?
2. Дайте визначення похідної. У чому полягає механічне значення похідної?
3. У чому полягає геометричний зміст диференціала?
4. Які ознаки зростання й убування функції?
5. Які значення аргументу називаються критичними?
6. Що називається екстремумом функції? Як знайти максимуми і мінімуми функції? Сформулюйте два правила.
7. Як надійти з дослідженням функції на екстремум, якщо друга похідна звертається в нуль?
8. Як визначається найбільше і найменше значення функції на відрізку.
9. Як знаходяться інтервали опуклості й угнутості графіка функції?
10. Як знаходяться асимптоті графіка функції?
11. З яких основних пунктів складається загальна схема дослідження функції і побудови її графіка?
12. Як скласти рівняння дотичної і нормалі до графіка функції в точці?
13. Як обчислити кутовий коефіцієнт дотичної до кривої в даній точці?
14. Як знайти найбільше і найменше значення функції, диференційованої на відрізку? Чи завжди вони існують?

8.Невизначений інтеграл.

Основні властивості невизначеного інтеграла.

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ 2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ 3. $\int df(x) = f(x) + C$

4. $\int f'(x)dx = f(x) + C$ 5. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

6. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, і $u = u(x)$ - диференційована функція, то

$\int f(u)du = F(u) + C$ (властивість інваріантності).

Таблиця невизначених інтегралів.

1. $\int 0\cdot du = C$. 2. $\int u^{\alpha} du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C; (\alpha \neq -1)$. 2а) $\int du = u + C$.

2б) $\int u du = \dfrac{u^2}{2} + C$. 2в) $\int \dfrac{du}{u^2} = -\dfrac{1}{u} + C$. 2г) $\int \dfrac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u} + C$.

2д) $\int \sqrt{u} du = \dfrac{2}{3}\sqrt{u^3} + C$. 3) $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$. 4) $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$.

4а) $\int e^u du = e^u + C$. 5) $\int \sin u du = -\cos u + C$. 6) $\int \cos u du = \sin u + C$.

7) $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = tgu + C$. 8) $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -ctgu + C$. 9) $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$.

9а) $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C$. 10. $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{u}{a} + C$.

10а) $\int \frac{du}{1+u^2} = arctgu + C$. 11. $\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$.

11а) $\int \frac{du}{u^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right| + C$. 12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$.

Основні методи інтегрування.

1). Уведення нового аргументу (властивість інваріантості).

Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, де $u = \varphi(x)$.

2). Метод підстановки. Якщо $f(x)$ - безперервна, то маючи $x = \varphi(t)$,

одержимо $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

3). Метод інтегрування по частинам. Якщо $u, v,$ - деякі

диференційовані функції від x, то $\int udv = uv - \int vdu$. Застосовується для обчислення інтегралів вигляду: $\int P(x)e^{\alpha x}dx$; $\int P(x)\cos bxdx$; $\int P(x)\sin bxdx$; $\int P(x)\ln xdx$.

Приклад 1. $\int xe^{3x}dx = \left| \begin{matrix} u = x; & dv = e^{3x}dx \\ du = dx; & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{matrix} \right| = \frac{xe^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}dx = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9} + C$.

1. Якщо $\int P(x)\begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx$, то $u = P(x)$; $dv = \begin{Bmatrix} e^x \\ \sin x \\ \cos x \end{Bmatrix} dx$

2. Якщо $\int P(x)\begin{Bmatrix} \ln x \\ ar \ \ x\sin dx \\ arctgx \end{Bmatrix}$, то ; $u = \begin{Bmatrix} \ln x \\ \arcsin x \\ arctgx \end{Bmatrix} dx$; $dv = P(x)dx$

Питання для самоперевірки.

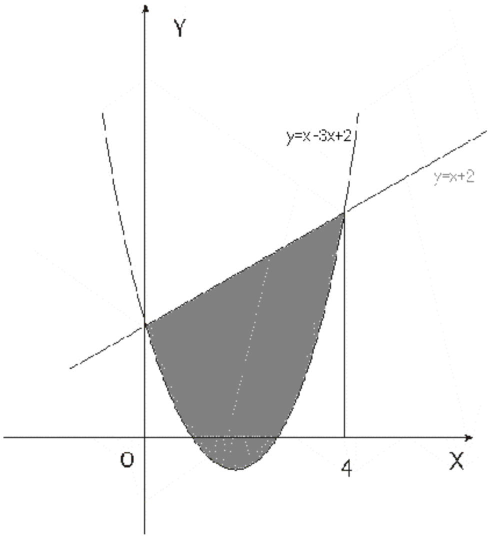
1. Якою дією перевіряється інтегрування?
2. Перелічите основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Викладете методи інтегрування найпростіших раціональних дробів**.**
1. У чому полягає метод інтегрування по частинам? У чому полягає метод заміни змінної?

9.Визначений інтеграл.

1. Для перебування визначеного інтеграла треба:
   - Знайти невизначений інтеграл
   - У функціональну частину невизначеного інтеграла підставити спочатку верхню межу, потім нижню, і з першого результату підстановки відняти другий. $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.
2. Варто пам'ятати, що у визначеному інтегралі межі інтегрування завжди відносяться тільки до тієї перемінний, котра входить до складу підінтегрального виразу. Тому при обчисленні визначеного інтеграла межі варто підставляти тільки замість даної перемінний, а не замість нової змінної.

$$S = \int_a^b f(x)dx; V = \pi\int_a^b y^2 dx; A = \int_a^b f(x)dx.$$

Обчислення площі плоскої фігури. Площа фігурі, обмеженої двома неперервними кривими, причому $f_2(x)>f_1(x)$ на інтервалі(a;b), задається формулою: $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.



Приклад 2. Обчислити площу фігурі, обмеженої лініями:$y=x^2-3x+2$ та $y=x+2$. Спочатку знайдемо точки перетину двох даних ліній. Для цього треба розв'язати систему рівнянь: $\begin{cases} y = x^2 - 3x + 2 \\ y = x + 2 \end{cases}$. Тоді a=0;b=4.

$$\int_0^4 \left((x+2)-(x^2-3x+2)\right)dx = 10\frac{2}{3} \text{ (кв.од).}$$

Питання для самоперевірки.

1. Що таке визначений інтеграл? У чому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла?
2. Властивості визначеного інтеграла.
3. Як обчислюються площі плоских фігур за допомогою визначеного інтеграла?

10.Диференціальні рівняння.

Основні поняття диференціальних рівнянь. Задача Коші. Лінійні диференціальні рівняння. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку. Системи диференціальних рівнянь.

Рівняння називається диференційним, якщо в нього крім шуканої функції входять Ії похідні або диференціали.

Диференціальні рівняння першого порядку. Рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

Так називаються рівняння, в яких можна відокремити змінні, тобто привести до вигляду g(y)dy=h(x)dx або $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$.Рішення такого рівняння виконується безпосереднім інтегруванням $\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C$.Рівняння виду $f(x)F(y)dx + \varphi(x)\theta(y)dy = 0$ можна привести до виду $f(x)dx + \varphi(y)dy = 0$, розділивши всі члени рівняння на добуток $\varphi(x)F(y)$.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' = 2xy$

$\frac{dy}{dx} = 2xy;\quad \frac{dy}{y} = 2dx$. Після того, як змінні відокремлені, інтегруємо ліву та праву частини:$\int \frac{dy}{y} = \int 2xdx;\quad \ln y = x^2 + C;\quad y = e^{x^2+C}$.

Отриманий розв'язок містить довільну сталу C і називається загальним розв'язком . Загальний розв'язок кожного рівняння першого порядку завжди містить одну довільну сталу. Для Ії знаходження (тобто розв'язування задачі Коши) необхідно знати початкову умову, тобто відоме значення функції при деякому відомому значенні аргументу.

Однорідними диференціальними рівняннями називаються рівняння, що можуть бути приведені до виду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$, тобто похідна виражена у виді функції від відношення $\frac{y}{x}$.Для інтегрування таких рівнянь роблять заміну перемінних $\frac{y}{x} = t$. Ця підстановка приводить до диференціального рівняння відносно x і t у якому змінні відокремлені , після чого можна інтегрувати.

*Приклад 2.*Розв'язати рівняння : $xy' = x + y$ Тоді $y' = 1 + \frac{y}{x}$, тобто маємо однорідне рівняння.

Робимо заміну $y = tx;\quad y' = t'x + t;\quad t'x + t = 1 + \frac{tx}{x} \Rightarrow t'x + t = 1 + t;\quad t'x = 1$Відокремимо змінні

$$dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow t = \ln x + \ln C \Rightarrow y = x \ln Cx.$$

Лінійні диференціальні рівняння містять невідому функцію і її похідну тільки в першої степені. $y' + yf(x) = F(x)$.

Для розв’язування цих рівнянь використовують підстановку $y = uv$, де u і v- допоміжні шукані функції.

Приклад 3. $x^2 y' + 2xy = e^{-x}$. Для зведення до стандартного вигляду поділимо ліву та праву частини на x^2: $y' + \frac{2}{x} y = \frac{e^{-x}}{x^2}$; $\quad y = uv$; $\quad y' = u'v + v'u$; $\quad u'v + v'u + \frac{2uv}{x} = \frac{e^{-x}}{x^2}$

Далі у другому та третьому доданках виносимо за дужки u, а те що залишається у дужках, прирівнюємо до нуля: $u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = \frac{e^{-x}}{x^2}$; $\quad v' + \frac{2v}{x} = 0$ - це рівняння є рівняння з відокремлюваними змінними. Знаходимо який-небудь його розв’язок:

$\frac{dv}{dx} = -\frac{2v}{x}$; $\quad \frac{dv}{v} = -\frac{2dx}{x}$; $\quad \ln v = -2\ln x$; $\quad v = \frac{1}{x^2}$. Для знаходження u підставляємо знайдене v у рівняння $u'v + u\left(v' + \frac{2v}{x}\right) = \frac{e^{-x}}{x^2}$; Тоді отримуємо $u' \frac{1}{x^2} = \frac{e^{-x}}{x^2}$; $\quad u' = e^{-x}$; $\quad u = -e^{-x} + C$.

Загальний розв’язок такий : $y = \frac{-e^{-x} + C}{x^2}$.

Питання для самоперевірки.

1. Яке рівняння називається диференціальним.
2. Назвіть відомі вам типи диференціальних рівнянь.
3. У чому міститься відокремлювання змінних у диференціальному рівнянні?
4. Яке рівняння називається диференціальним лінійним і як воно інтегрується?
5. Яке рівняння називається однорідним диференціальним і як воно інтегрується?

Список літератури:

- Основна:

1. Г.Н. Яковлев. Алгебра и начала анализа. 2 ч. М.1978.
2. Г.Н. Яковлев. Геометрия. М.1978.
3. Т.Г. Стрижак. Математичний аналіз. Київ.1995.
4. Ю.К. Рудавський. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії.
5. Ю.К. Рудавський. Лінійна алгебра та аналітична геометрія.
6. В.М. Лейфура. Математика. К. 2003.
7. Л.І.Дюженкова. Математичний аналіз у задачах і прикладах. К.2003.Ч.1.
8. Л.І.Дюженкова. Математичний аналіз у задачах і прикладах. К.2003.Ч.2.
9. Т.Г Стрижак. Математичний аналіз.К.1995.
10. Л.В. Барановська.Завдання для практичних занять з вищої математики.К.2002.
11. Т.В.Лубенська. Вища математика в таблицях. К.2002.

- Додаткова:

12. А.А. Гусак. Высшая математика. 2 ч. Минск.2001.
13. В.В. Пак. Вища математика. Київ. 1986.
14. И.А. Каплан. Практические занятия по высшей математике. 2ч.Харьков.1970.
15. К.Н. Лунгу. Сборник задач по высшей математике. М.2001.
16. Н.В. Богомолов. Практические занятия по математике. М. 1990.
17. Д.Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике. 2 ч. М.2002.
18. П.Е. Данко. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.2002.
19. А.А. Гусак. Пособие к решению задач по высшей математике. Минск. 1967.
20. М.Я. Выгодский . Справочник по высшей математике. М. 2001.
21. В.Т. Лисичкин. Математика. М.1991.