Вариант 31.
Задание 1. Решить систему уравнений двумя способами: 1) методом Крамера; 2) методом Гаусса; (предварительно подставить значения коэффициентов, согласно варианту).

$$1)\begin{cases} bx+cy-az=b^2 \\ ax-by+cz=c^2 \\ cx+ay-bz=a^2 \end{cases} \quad 2)\begin{cases} cx+by-az=b^2 \\ -bx+ay+cz=c^2 \\ ax+cy-bz=a^2 \end{cases} \quad 3)\begin{cases} cx-ay+bz=b^2 \\ -bx+cy+az=c^2 \\ ax+by-cz=a^2 \end{cases}$$

a =-1
b=-5
c=2
Метод Крамера:

$$1)\begin{cases} -5x+2y+z=25 \\ -x+5y+2z=4 \\ 2x-y+5z=1 \end{cases};$$

$$D=\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=(-5)\cdot5\cdot5+2\cdot2\cdot2+(-1)\cdot1\cdot(-1)-;$$

$$-2\cdot5\cdot1-(-5)\cdot2\cdot(-1)-(-1)\cdot2\cdot5=-126\neq0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 25 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=625+4-4-5+50-40=630;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} -5 & 25 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-100+100-1-8+10+125=126;$$

$$D_z=\begin{vmatrix} -5 & 2 & 25 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-25+16+25-250-20+2=-252$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{630}{-126}=-5;\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{126}{-126}=-1;\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{-252}{-126}=2$$

Ответ:(-5;-1;2).
Метод Гаусса

$$\begin{cases} -5x+2y+z=25 \\ -x+5y+2z=4 \\ 2x-y+5z=1 \end{cases}$$

Первую строку умножим на 2 и вычтем из второй строки, а затем умножим на 5 и вычтем из третьей строки, чтобы избавиться от z, во второй строке получим: *9x+y=-46*, в третьей *2x-11y=-124*. Система примет вид: $\begin{cases} -5x+2y+z=25 \\ 9x+y=-46 \\ 27x-11y=-124 \end{cases}$

Чтобы избавиться от *x* вторую строку умножим на 3 и вычтем ее из третьей. Получим

$\begin{cases} -5x+2y+z=25 \\ 9x+y=-46 \\ -14y=14 \end{cases}$. Из третьей строки найдем *y*. *-14y=14, y=-1*

Подставляя значение *y* во вторую строку находим *x*.

9x+(-1)=-46

9x=-45

x=-5

Подставляя значения *x* и *y* в первую строку, находим *z*

-5(-5)+2(-1)+z=25

z=25-23

z=2.

Ответ:(-5;-1;2).

2) $\begin{cases} 2x-5y+z=25 \\ 5x-y+2z=4 \\ -x+2y+5z=1 \end{cases}$

Метод Крамера:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot(-1)\cdot 5+(-5)\cdot 2\cdot(-1)+5\cdot 2\cdot 1-(-1)\cdot(-1)\cdot 1-2\cdot 2\cdot 2-5\cdot(-5)\cdot 5=126\neq 0$$

Система совместна.

$$D_x=\begin{vmatrix} 25 & -5 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}=-125-10+8+1-100+100=-126;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 25 & 1 \\ 5 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix}=40-50+5+4-4-625=-630;$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 25 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-2+20+250-25-16+25=252;$$

$x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-126}{126}=-1;\ y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-630}{126}=-5;\ z=\dfrac{D_z}{D}=\dfrac{252}{126}=2$. Ответ: (-1;-5;2)

Метод Гаусса:

$\begin{cases} 2x-5y+z=25 \\ 5x-y+2z=4 \\ -x+2y+5z=1 \end{cases}$ первую строку умножаем на 2 и вычитаем из второй строки. Затем умножаем на 5 и вычитаем из третьей строки. Получим $\begin{cases} 2x-5y+z=25 \\ x+9y=-46 \\ -11x+27y=-124 \end{cases}$

Затем вторую строку полученной системы умножим на 3 и вычтем ее из третьей строки.

Получим $\begin{cases} 2x-5y+z=25 \\ x+9y=-46 \\ -14x=-14 \end{cases}$, из последнего уравнения системы найдем *x*: *-14x=14, x=-1.*

Подставляя найденное значение во вторую строку, найдем *y: -1+9y=-46, y=-5.* Подставляя значения *x* и *y* в первую строку, найдем *2(-1)-5(-5)+z=25, z=2.*

Ответ: (-1;-5;2)

3) метод Крамера:

$$\begin{cases} 2x+y-5z=25 \\ 5x+2y-z=4 \\ -x-5y-2z=1 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 5 & 2 & -1 \\ -1 & -5 & -2 \end{vmatrix}=2\cdot(-2)\cdot 2+(-1)\cdot 1\cdot(-1)+5\cdot(-5)\cdot(-5)-(-1)\cdot(-5)\cdot 2-2\cdot(-1)\cdot(-5)-5\cdot(-2)\cdot 1=$$

$$=108\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 25 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & -2 \end{vmatrix}=-100-1+100+10-125+8=-108;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 2 & 25 & -5 \\ 5 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-16+25-25-20+2+250=216;$$

$$D_z=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 25 \\ 5 & 2 & 4 \\ -1 & -5 & 1 \end{vmatrix}=4-4-625+50+40-5=-540$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-108}{108}=-1;\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{216}{108}=2;\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{-540}{108}=-5$$

Ответ: (-1;2;-5)

Метод Гаусса:

$$\begin{cases} 2x+y-5z=25 \\ 5x+2y-z=4 \\ -x-5y-2z=1 \end{cases}$$ Чтобы избавиться от *y*, первую строку умножим на 2 и вычтем из второй строки, а затем умножим на *(-5)* и вычтем из третьей строки, получим

$$\begin{cases} 2x+y-5z=25 \\ 5x+9z=-46 \\ 9x-27z=126 \end{cases}$$; затем вторую строку умножим на (-3) и вычтем из третьей, получим:

$$\begin{cases} 2x+y-5z=25 \\ 5x+9z=-46 \\ 12x=-12 \end{cases}$$, из последнего уравнения системы найдем значение *x*:

12x=-12; x=-1.

Подставим значение *x* во вторую строку, получим *-1+9z=-46, z=-5.* И из первой строки, получаем *-2+y+25=25, y=2.*

Ответ: (-1;2;-5)

Задание 2. Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

$\vec{a}$=(1;5;-4) $\vec{b}$ =(-3 ;1;2) $\vec{c}$ =(1 ;-3;1)

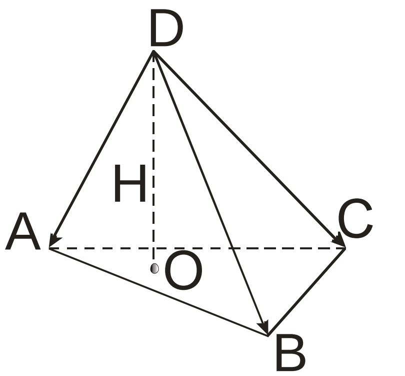
Найдем смешанное произведение векторов в координатах:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{matrix} = 7 - 21 + 14 = 0$$; Смешанное произведение векторов равно нулю, следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.

Задание 3.

Вычислить объем тетраэдра ABCD и высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

A=(1;2;-3) B=(1;0;1) C=(2;-1;6) D=(0;-5;-4)



Объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}V$ параллелепипеда, построенного на ребрах DB, DC, DA

$\overrightarrow{DA}(-1;-7;-1)$, $\overrightarrow{DB}(-1;-5;-5)$, $\overrightarrow{DC}(2;-4;-10)$

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -7 & -1 \\ -1 & -5 & -5 \\ 2 & -4 & -10 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-50 - 4 + 70 - 10 + 70 + 20) = 16$$

куб. ед.

Чтобы найти длину высоты тетраэдра DO, необходимо вычислить расстояние от точки D до плоскости ABC, которое имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$$, далее, раскрывая определитель, получаем

-18(x-10-12(y-2)-6(z+3)+12(x-1)=0;

-6x+6-12y+24-6z-18=0 или x+2y+z-2=0 – уравнение плоскости ABC

A=1; B=2; C=1; D=-2, $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ - расстояние от точки до плоскости, а

значит и высота равна: $d = h = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot (-5) + \cdot(-4) + (-2)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{16}{\sqrt{6}}$ ед.

Ответ: $V = 16; h = \frac{16}{\sqrt{6}}$.

Задание 4. Найти угол между прямой и плоскостью и точку их пересечения:

$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+3}{-2}$; $3x - y + 4z = 0$

Острый угол между прямой и плоскостью определяем по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} =$$

$$\left|\frac{3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-3) + 4 \cdot (-2)}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-2)^2}}\right| = \frac{7}{6\sqrt{29}} \approx 0,2166$$

Найдем точку пересечения прямой и плоскости.

Представим уравнение прямой в параметрическом виде.

$\begin{cases} x = 4t+2 \\ y = -3t+1 \\ z = -2t-3 \end{cases}$, затем подставим значения x, y, z в уравнение плоскости и получим,

$3(2+4t)-(-3t+1)+4(-2t-3)=0$,

$t=1$, и отсюда, подставив это значение в параметрическое уравнение прямой, найдем координаты точки пересечения: $x=6, y=-2, z=-5$.

Задание 5.

Привести к каноническому виду и построить график:

$2x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 28 = 0$

$(2x^2+8x)+(12y-3y^2)=28$, в каждой из скобок выделим полный квадрат

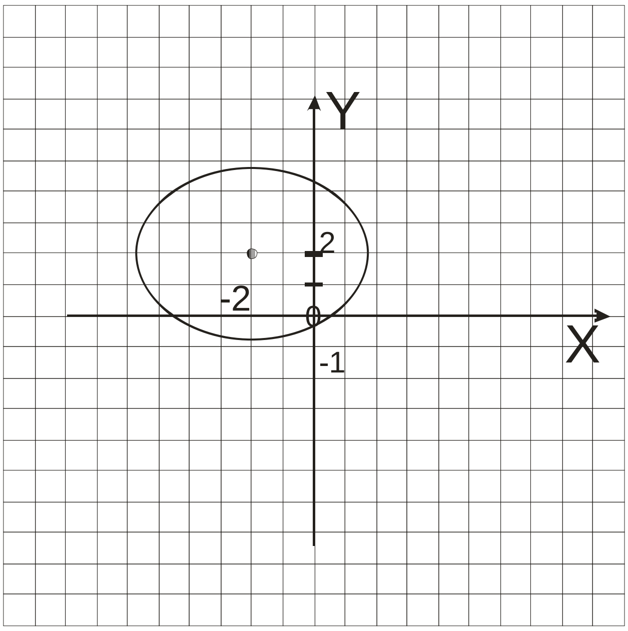
$2\left[(x^2+4x+4)-4\right]-3\left[(y^2-4y+4)-4\right]=28$

$2(x+2)^2-3(y-2)^2-24=0$, обозначим $x_1 = x+2, y_1 = y-2$. Произведенная замена представляет собой преобразование координат всех точек плоскости параллельным переносом координатных осей без изменения их направления. Новое начало координат находится в точке

$O_1(-2;2)$ и уравнение принимает вид $2x_1^{\,2}-3y_1^{\,2}=24$. Разделим обе части уравнения на 24, получим каноническое уравнение эллипса

$\frac{x_1^{\,2}}{12}-\frac{y_1^{\,2}}{8}=1$, где

$a=\sqrt{12}\approx 3,464; b=\sqrt{8}\approx 2,828$



Задание 6. Вычислить производную функции.

а) $y = \operatorname{arc} ctg\sqrt{x^2+1}$ $\quad y' = -\frac{1}{1+x^2+1}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x$

б) $y = x\sin^2 4x$; $y' = \sin^2 4x + 4x\cdot 2\sin 4x\cos 4x$

в) $y=\frac{\arcsin 2x}{\ln x}$; $y' = \left(\frac{\arcsin 2x}{\ln x}\right)' = \frac{\frac{2\ln x}{\sqrt{1-4x^2}}-\frac{\arcsin 2x}{x}}{\ln^2 x}$

г) $e^y = 4x - 7y$;

$e^y \cdot y' = 4 - 7y';$

$e^y \cdot y' + 7y' = 4;$

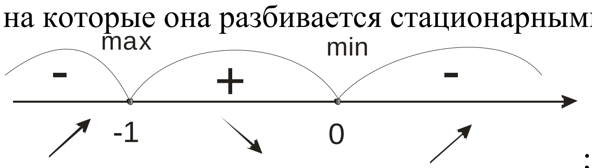
$(e^y + 7)y' = 4;$

$y' = \dfrac{4}{(e^y + 7)}$

Задание 7. Исследовать на экстремум, найти точки перегиба и построить график функции, а также составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке,
где $x_0=1$.

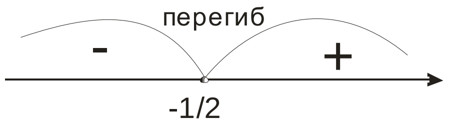
$y = 2\cdot\left(x^3\right)+3\cdot\left(x^2\right)+1$ Найдем стационарные точки функции $f'(x) = 6x^2 + 6x = 6x(x+1)$, $6x(x+1) = 0$ а значит, существуют две критические точки $x_1 = 0; x_2 = -1$, в которых первая производная равна нулю.

Исследуем поведение функции на промежутках области определения, на которые она разбивается стационарными точками

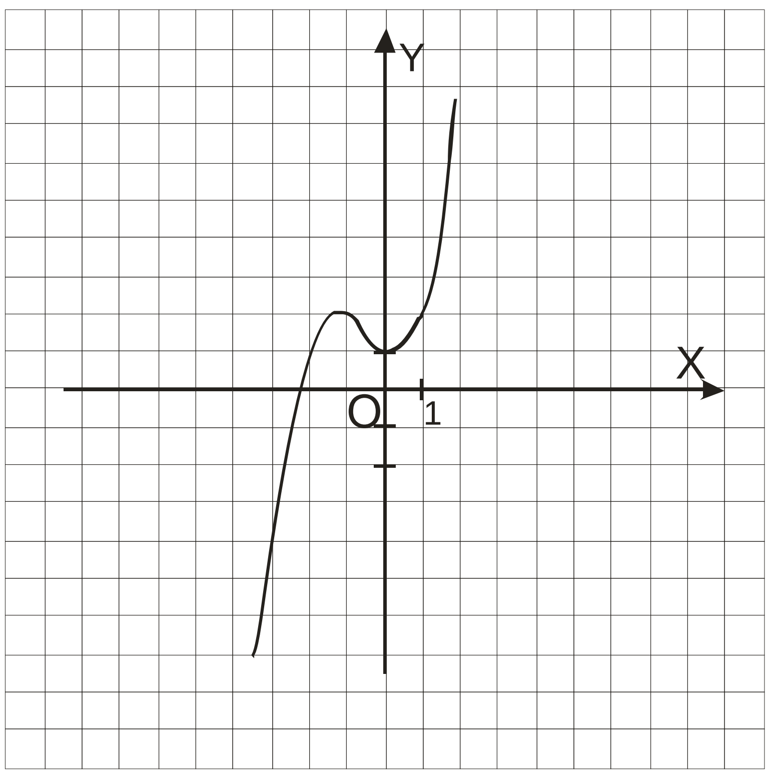


;

Найдем значения функции в стационарных точках:
$f(0) = 1,\ f(-1) = 2$.С помощью второй производной исследуем функцию на выпуклость и точки перегиба $f''(x) = 12x + 6$, $x = \dfrac{1}{2}$ - стационарная точка второго рода,
$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1\dfrac{1}{2}$. Исследуем знаки второй производной



, функция выпукла на интервале $(-\infty;1)$, и вогнута на интервале $(1;+\infty)$



Составим уравнение касательной к графику функции в точке $x_0=1$

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

$f(x_0) = 6$; $f'(x_0) = 12$; $y - 6 = 12(x-1)$, тогда $y = 6x - 7$ - уравнение касательной.

$y + 1 = -\frac{1}{12}(x-1)$ - уравнение нормали .

Задание 8.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

$y = 8x + \frac{4}{x^2} - 15; [0{,}5; 2]$

$y = \sqrt[3]{2x^2(x-6)}; [-2; 4]$

$y' = \frac{2x(x-4)}{\sqrt[3]{(2x^2(x-6))^2}}$ знаменатель дроби всегда будет положительным, значит критические точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 4$. Обе критические точки принадлежат отрезку. Найдем значения функции на концах отрезка и в критических точках.

$f(-2) = \sqrt[3]{2 \cdot (-2)^2 \cdot (-2-6)} = -4$;

$f(0) = \sqrt[3]{2 \cdot 0^2 \cdot (0-6)} = 0$;

$f(4) = \sqrt[3]{2 \cdot 4^2 \cdot (4-6)} = -4$, таким образом, $\max\limits_{[-2;4]} f(x) = f(0) = 0$ и

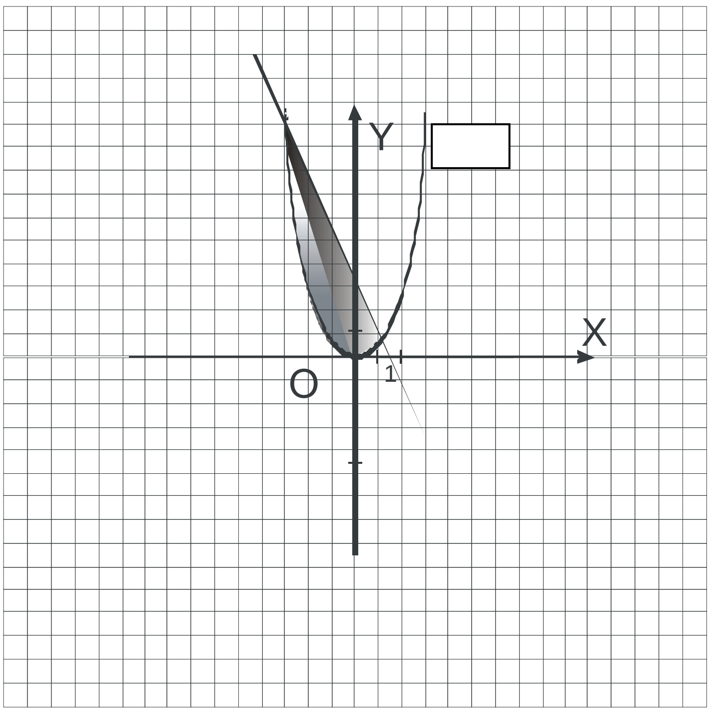
$\min\limits_{[-2;4]} f(x) = f(-2) = f(2) = -4$

Задание 9.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Постройте график.

$y = x^2$; $y = 3 - 2x$ Чтобы вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$ и $y = 3 - 2x$, найдем их точки пересечения $x^2 = 3x - 2x$, а значит $x_1 = 1$ и $x_2 = -3$

$$S = \int_{-3}^{1} (x^2 + 2x - 3)dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 - 3x \right)\Bigg|_{-3}^{0} = 25\frac{1}{3} \quad . \quad .$$



Задание 10. Найти общие решения дифференциального уравнения

$xy' - 2y = 2x^4$ - линейное дифференциальное уравнение. Разделим обе части уравнения на x, получим $y' - \frac{2y}{x} = 2x^3$, пусть $y = uv, y' = u'v + v'u$, тогда

$u'v + v'u - \frac{2uv}{x} = 2x^3;$

$u'v + u(v' - \frac{2v}{x}) = 2x^3$

Выражение в скобках приравняем к нулю. $v' - \frac{2v}{x} = 0$, получим уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dv}{dx} = \frac{2v}{x}$, и $\frac{dv}{v} = \frac{2dx}{x}$, интегрируя, получим

$\ln v = 2\ln x, v = x^2$.

Найдем v

$u'x^2 = 2x^3;$

$u' = 2x;$

$\frac{du}{dx} = 2x;$

$du = 2xdx;$

$u = x^2 + C$

Тогда $y = (x^2 + C)x^2$ - общее решение дифференциального уравнения