Вариант 00.

Задание 1. Решить систему уравнений двумя способами: 1) методом Крамера; 2) методом Гаусса; (предварительно подставить значения коэффициентов, согласно варианту).

$$1)\begin{cases} bx+cy-az=b^2 \\ ax-by+cz=c^2 \\ cx+ay-bz=a^2 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} cx+by-az=b^2 \\ -bx+ay+cz=c^2 \\ ax+cy-bz=a^2 \end{cases}$$

a =-1

b=-5

c=2

Метод Крамера:

$$1)\ \begin{cases} -5x+2y+z=25 \\ -x+5y+2z=4 \\ 2x-y+5z=1 \end{cases};$$

$$D=\begin{vmatrix} -5 & 2 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -1 & 5 \end{vmatrix}=(-5)\cdot 5\cdot 5+2\cdot 2\cdot 2+(-1)\cdot 1\cdot(-1)- ;$$

$$-2\cdot 5\cdot 1-(-5)\cdot 2\cdot(-1)-(-1)\cdot 2\cdot 5=-126\neq 0$$

$$D_x=\begin{vmatrix} 25 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}=625+4-4-5+50-40=630;$$

$$D_y=\begin{vmatrix} -5 & 25 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}=-100+100-1-8+10+125=126;$$

$$D_z=\begin{vmatrix} -5 & 2 & 25 \\ -1 & 5 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-25+16+25-250-20+2=-252$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{630}{-126}=-5;\ y=\frac{D_y}{D}=\frac{126}{-126}=-1;\ z=\frac{D_z}{D}=\frac{-252}{-126}=2$$

Ответ:(-5;-1;2).

$$2)\ \begin{cases} 2x-5y+z=25 \\ 5x-y+2z=4 \\ -x+2y+5z=1 \end{cases}$$

Метод Гаусса:

$$\begin{cases} 2x-5y+z=25 \\ 5x-y+2z=4 \\ -x+2y+5z=1 \end{cases}$$ первую строку умножаем на 2 и вычитаем из второй строки. Затем умножаем на 5 и вычитаем из третьей строки. Получим $\begin{cases} 2x-5y+z=25 \\ x+9y=-46 \\ -11x+27y=-124 \end{cases}$

Затем вторую строку полученной системы умножим на 3 и вычтем ее из третьей строки.

Получим $\begin{cases} 2x-5y+z=25 \\ x+9y=-46 \\ -14x=-14 \end{cases}$, из последнего уравнения системы найдем *x*: *-14x=14, x=-1.*

Подставляя найденное значение во вторую строку, найдем *y: -1+9y=-46, y=-5*. Подставляя значения *x* и *y* в первую строку, найдем *2(-1)-5(-5)+z=25, z=2.*
Ответ: (-1;-5;2)
Подставим значение *x* во вторую строку, получим *-1+9z=-46, z=-5.* И из первой строки, получаем *-2+y+25=25, y=2.*
Ответ: (-1;2;-5)

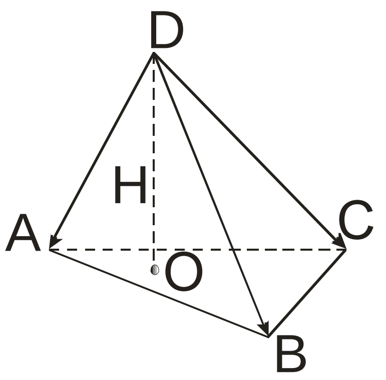
Задание 2. Компланарны ли векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?
$\vec{a}$=(1;5;-4) $\vec{b}$=(-3 ;1;2) $\vec{c}$ =(1 ;-3;1)
Найдем смешанное произведение векторов в координатах:

$\begin{vmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 5 \\ -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{matrix} = 7-21+14=0$; Смешанное произведение векторов равно нулю,

следовательно, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - компланарны.

Задание 3.
Вычислить объем тетраэдра ABCD и высоту, опущенную из вершины D на грань ABC.

A=(1;2;-3) B=(1;0;1) C=(2;-1;6) D=(0;-5;-4)



Объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}V$ параллелепипеда, построенного на ребрах DB, DC, DA

$\overrightarrow{DA}(-1;-7;-1)$, $\overrightarrow{DB}(-1;-5;-5)$, $\overrightarrow{DC}(2;-4;-10)$

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -7 & -1 \\ -1 & -5 & -5 \\ 2 & -4 & -10 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}(-50-4+70-10+70+20)=16$$

куб. ед.

Чтобы найти длину высоты тетраэдра DO, необходимо вычислить расстояние от точки D до плоскости ABC, которое имеет вид:

$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & -3 & 9 \end{vmatrix} = 0$, далее, раскрывая определитель, получаем

-18(x-10-12(y-2)-6(z+3)+12(x-1)=0;
-6x+6-12y+24-6z-18=0 или x+2y+z-2=0 – уравнение плоскости ABC

A=1; B=2; C=1; D=-2, $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ - расстояние от точки до плоскости, а значит и высота равна: $d=h=\dfrac{|1\cdot 0+2\cdot(-5)+\cdot(-4)+(-2)|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\dfrac{16}{\sqrt{6}}$ ед.

Ответ: $V=16;h=\dfrac{16}{\sqrt{6}}$.

Задание 4. Найти угол между прямой и плоскостью и точку их пересечения:

$\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-1}{-3}=\dfrac{z+3}{-2};\quad 3x-y+4z=0$

Острый угол между прямой и плоскостью определяем по формуле:

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=$$

$$\left|\frac{3\cdot 4+(-1)\cdot(-3)+4\cdot(-2)}{\sqrt{3^2+4^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{4^2+(-3)^2+(-2)^2}}\right|=\frac{7}{6\sqrt{29}}\approx 0,2166$$

Найдем точку пересечения прямой и плоскости.

Представим уравнение прямой в параметрическом виде.

$\begin{cases}x=4t+2\\ y=-3t+1\\ z=-2t-3\end{cases}$, затем подставим значения x,y,z в уравнение плоскости и получим,

$3(2+4t)-(-3t+1)+4(-2t-3)=0$,

$t=1$, и отсюда, подставив это значение в параметрическое уравнение прямой, найдем координаты точки пересечения: $x=6,y=-2,z=-5$.

Ответ: $\dfrac{7}{6\sqrt{29}}$; $x=6,y=-2,z=-5$.

Задание 5.

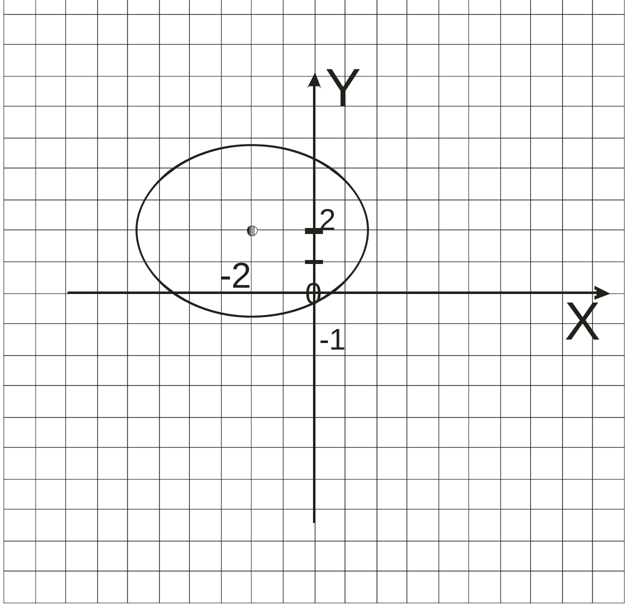
Привести к каноническому виду и построить график:

$2x^2 -3y^2 +8x +12y -28 =0$

$(2x^2+8x)+(12y-3y^2)=28$, в каждой из скобок выделим полный квадрат

$2\left[(x^2+4x+4)-4\right]-3\left[(y^2-4y+4)-4\right]=28$

$2(x+2)^2-3(y-2)^2-24=0$, обозначим $x_1=x+2, y_1=y-2$. Произведенная замена представляет собой преобразование координат всех точек плоскости параллельным



переносом координатных осей без изменения их направления. Новое начало координат находится в точке $O_1(-2;2)$ и уравнение принимает вид $2x_1^{\,2}-3y_1^{\,2}=24$. Разделим обе части уравнения на 24, получим каноническое уравнение эллипса $\dfrac{x_1^{\,2}}{12}-\dfrac{y_1^{\,2}}{8}=1$, где

$a=\sqrt{12}\approx 3,464; b=\sqrt{8}\approx 2,828$

Задание 6. Вычислить производную функции.

а) $y = \operatorname{arc}ctg\sqrt{x^2+1}$ $\quad y' = -\dfrac{1}{1+x^2+1}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x$

б) $y = x\sin^2 4x$; $y' = \sin^2 4x + 4x\cdot 2\sin 4x\cos 4x$

в) $y = \dfrac{\arcsin 2x}{\ln x}$; $y' = \left(\dfrac{\arcsin 2x}{\ln x}\right)' = \dfrac{\dfrac{2\ln x}{\sqrt{1-4x^2}} - \dfrac{\arcsin 2x}{x}}{\ln^2 x}$

г) $e^y = 4x - 7y$;

$e^y\cdot y' = 4 - 7y'$;

$e^y\cdot y' + 7y' = 4$;

$(e^y+7)y' = 4$;

$y' = \dfrac{4}{(e^y+7)}$

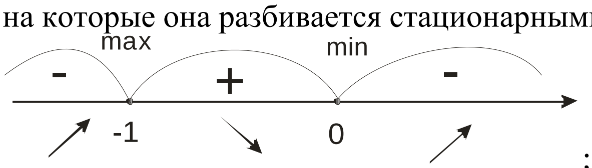
Задание 7. Исследовать на экстремум, найти точки перегиба и построить график функции, а также составить уравнение касательной и нормали к кривой в точке,
где x_0=1.

$y = 2\cdot\left(x^3\right)+3\cdot\left(x^2\right)+1$ Найдем стационарные точки функции $f'(x) = 6x^2+6x = 6x(x+1)$,

$6x(x+1)=0$ а значит, существуют две критические точки

$x_1 = 0; x_2 = -1$, в которых первая производная равна нулю.

Исследуем поведение функции на промежутках области определения, на которые она разбивается стационарными точками

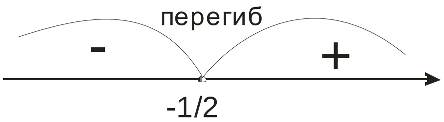


;

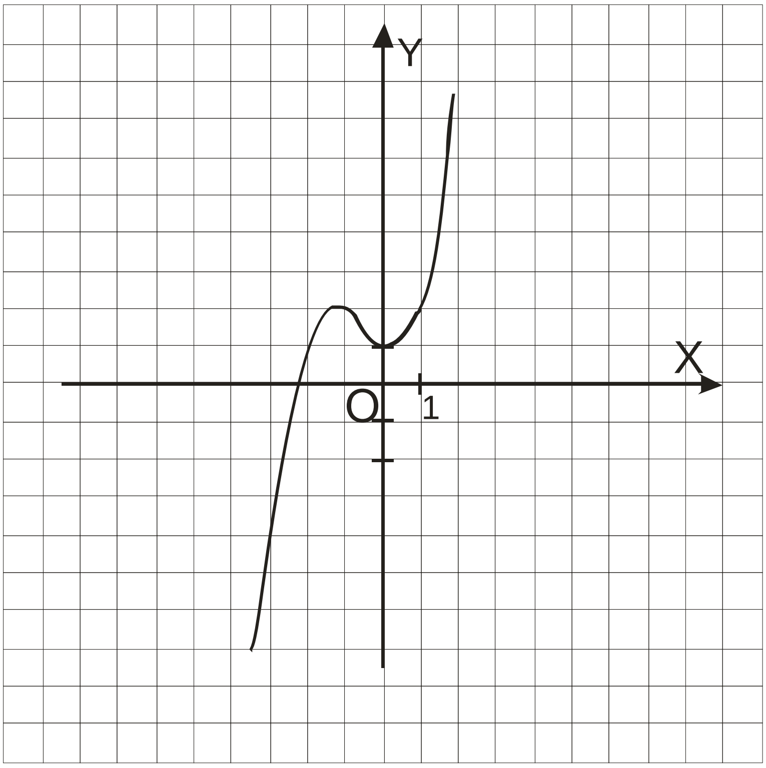
Найдем значения функции в стационарных точках:

$f(0)=1$, $f(-1)=2$.С помощью второй производной исследуем функцию на выпуклость и точки перегиба $f''(x)=12x+6$, $x=\dfrac{1}{2}$ - стационарная точка второго рода,

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1\dfrac{1}{2}$. Исследуем знаки второй производной



, функция выпукла на интервале $(-\infty;1)$, и вогнута на интервале $(1;+\infty)$



Составим уравнение касательной к графику функции в точке x_0=1

$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

$f(x_0)=6$; $f'(x_0)=12$; $y-6=12(x-1)$, тогда $y=6x-7$ - уравнение касательной.

$y+1=-\frac{1}{12}(x-1)$ - уравнение нормали .

Задание 8.Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке.

$y=8x+\frac{4}{x^2}-15;[0,5;2]$

$y=\sqrt[3]{2x^2(x-6)};[-2;4]$

$y'=\frac{2x(x-4)}{\sqrt[3]{(2x^2(x-6))^2}}$ знаменатель дроби всегда будет положительным, значит критические точки $x_1=0$ и $x_2=4$. Обе критические точки принадлежат отрезку. Найдем значения функции на концах отрезка и в критических точках.

$f(-2)=\sqrt[3]{2\cdot(-2)^2\cdot(-2-6)}=-4$;

$f(0)=\sqrt[3]{2\cdot 0^2\cdot(0-6)}=0$;

$f(4)=\sqrt[3]{2\cdot 4^2\cdot(4-6)}=-4$, таким образом, $\max\limits_{[-2;4]} f(x)=f(0)=0$ и

$\min\limits_{[-2;4]} f(x)=f(-2)=f(2)=-4$

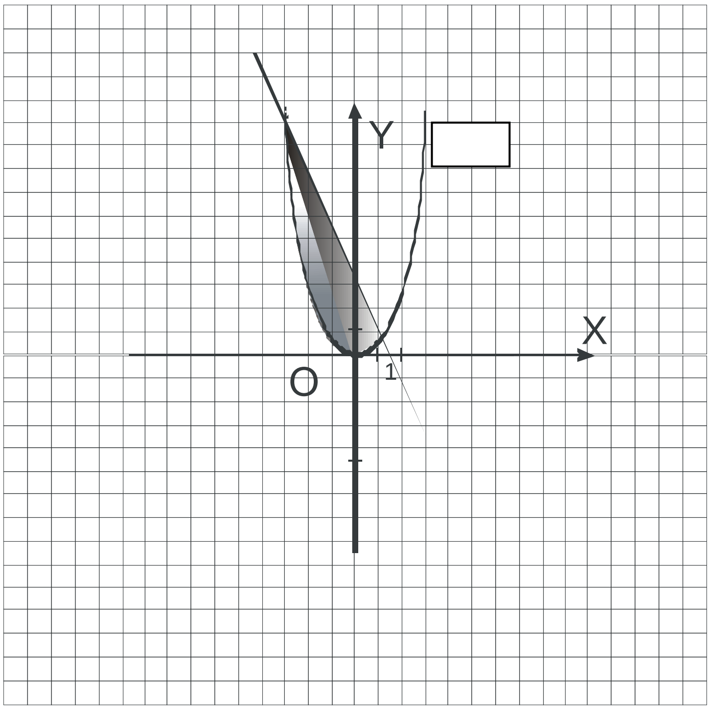
Ответ: $\max\limits_{[-2;4]} f(x)=f(0)=0$; $\min\limits_{[-2;4]} f(x)=f(-2)=f(2)=-4$

Задание 9.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Постройте график.

$y=x^2; y=3-2x$ Чтобы вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=3-2x$, найдем их точки пересечения $x^2=3x-2x$, а значит $x_1=1$ и $x_2=-3$

$$S=\int_{-3}^{1}(x^2+2x-3)dx=\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Bigg|_{-3}^{0}=25\frac{1}{3} \quad . \quad .$$



Ответ: $25\frac{1}{3}$*кв.ед*

Задание 10. Найти общие решения дифференциального уравнения
$xy'-2y=2x^4$ - линейное дифференциальное уравнение. Разделим обе части уравнения на x, получим $y'-\frac{2y}{x}=2x^3$, пусть $y=uv, y'=u'v+v'u$, тогда

$$u'v+v'u-\frac{2uv}{x}=2x^3;$$

$$u'v+u(v'-\frac{2v}{x})=2x^3$$

Выражение в скобках приравняем к нулю. $v'-\frac{2v}{x}=0$, получим уравнение с разделяющимися переменными $\frac{dv}{dx}=\frac{2v}{x}$, и $\frac{dv}{v}=\frac{2dx}{x}$, интегрируя, получим

$\ln v=2\ln x, v=x^2$.

Найдем v

$u'x^2=2x^3;$

$u'=2x;$

$\frac{du}{dx}=2x;$

$du=2xdx;$

$u=x^2+C$

Тогда $y = (x^2 + C)x^2$ - общее решение дифференциального уравнения

Ответ: $y = (x^2 + C)x^2$

Тут не все писать, выбрать около пяти источников

основна:

1. Валєєв К.Г., Джалладова І.А. Вища математика: Навч. посібник: У 2-х ч. – К.:КНЕУ, 2001.-Ч.І. – 546 с.;
2. Дубовик В.П. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., І.І. Юрик. – К. : Ігнатекс-Україна., 2013.-4-те вид. – 648 с: іл.
3. Рудавський Ю.К. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. /Ю.К.Рудавський, П.П.Костробій, Х.П.Луник, Д.В.Уханська – Л.:Бескид Біт, 2002. – 262с.
4. Дюженкова Л. І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: у 2 ч. / [Л. І. Дюженкова, Т.В.Колесник, М. Я. Лященко та ін.]. —Київ: Вища школа, 2002. — Ч1. — 462 с.; ч.2. — 470 с.
5. Овчинников П.П., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Вища математика: Підручник. У 2 ч. Ч. 1. – К.: Техніка, 2013р.
6. Рудавський Ю. К. Збірник задач з математичного аналізу: у 2 ч./[Ю. К. Рудавський, П.П. Костробій, Л. Л. Лібацький та ін.]. –Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2003-2008. – Ч. 1. — 2008. — 352 с.; ч. 2. — 2003. —232 с. 3
7. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Уханська Д.В., Батюк Ю.Р. та ін. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії – Львів: Видавництво «Бескид Біт», 2002. – 256 с.

додаткова:

1. Шкіль М.І. Вища математика: підручник: у 3-х кн. / М.І. Шкіль, Т.В. Колесник, В.М. Котлова. – К.: Либідь,1994. – Кн. 1.:Аналітична геометрія з елементами алгебри. Вступ до математичного аналізу. – 280с.; Кн. 2: Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Ряди. – 352 с.; Кн. 3: Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Диференціальні рівняння. – 352 с.
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика: Підручник. – К.: Вища шк., 2001. – 447 с.;
3. Соколенко О.І. Вища математика: Підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002. – 432 с.
4. Овчинников П.П. Вища математика: підручник: у 2-х ч. Ч.1: Лінійна і векторна алгебра. Аналітична геометрія. Вступ до математичного аналізу. иференціальне і інтегральне числення /П.П. Овчинников, Ф.П.Яремчук, В.М. Михайленко; За заг. ред. П.П. Овчинникова; пер. з рос. П.М. Юрченка. 3-тє вид., випр. –К.: Техніка, 2003. – 600 с.: іл.; Ч. 2: Диференціальні рівняння. Операційне ислення. Ряди та їх застосування. Стійкість за Ляпуновим. Рівняння математичної фізики. Оптимізація та керування. Теорія ймовірностей. Числові методи / П.П. Овчинников, В.М. Михайленко; за заг. ред. П.П. Овчинникова; пер. з рос. Є.В. Бондарук, Ю.Ю. Костриці, Л.П. Оніщенко. – 3-тє вид., випр. – К.: Техніка, 2004. – 792 с.: іл.